MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

59. BAND 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 19. OKTOBER 1953)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1953

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp, E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanst aße 8.
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

59. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

Stallmann, F., Konforme Abbildung gewisser Kreisbogenvierecke als Eigenwertproblem 211
Lorentz, G. G., and M. S. Macphail, Direct theorems on methods of summability. III: Absolute summability functions 231
Volkmann, B., Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Ziffern-eigenschaften charakterisiert sind. II. 247
Krubeck, E., Über Zerfällungen in paarweis ungleiche Polynomwerte 255
Grotemeyer, K. P., Bemerkung zur Verbiegung konvexer Flächen 258
Volkmann, B., Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Ziffern-eigenschaften charakterisiert sind. III. 259
Zeller, K., Über die Darstellbarkeit von Limitierungsverfahren mittels Matrixtransformationen 271
Grotemeyer, K. P., Gleitverbiegungen und eindeutige Bestimmtheit isometrischer, ebenrandiger Mützen 278
Pinl, M., B-Kugelbilder reeller Minimalflächen in R_4 290
Krull, W., Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. II. 296
Baer, R., Das Hyperzentrum einer Gruppe. III. 299

Stallmann, F.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 211—230 (1953)

Konforme Abbildung gewisser Kreisbogenvierecke als Eigenwertproblem.

Von
Friedemann Stallmann.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist eine etwas veränderte und erweiterte Fassung der Diplomarbeit, die der Verfasser 1949 bei Herrn F. Lösch in Stuttgart anfertigte. Den Ausgangspunkt bildete eine Arbeit von Herrn E. Ullrich[1]).

Gestellt war die Aufgabe, einen Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe konform auf die obere Halbebene abzubilden (Fig. 1). Bei der Durchführung

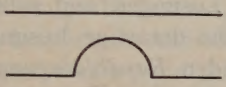

Fig. 1.

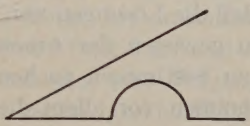

Fig. 2.

dieser Aufgabe ergab es sich, daß mit den benutzten Methoden auch eine allgemeinere Klasse von Bereichen, nämlich der Winkelraum mit Halbkreiskerbe behandelt werden kann (Fig. 2). Der Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe ergab sich hieraus als ein Spezialfall. Die genannten Bereiche sind Kreisbogenvierecke und die gesuchte Abbildungsfunktion erhält man in bekannter Weise über die Integration einer Laméschen Differentialgleichung. Es konnten hier die Ideen von F. Klein betreffend die geometrische Deutung gewisser Eigenwertprobleme eine recht fruchtbare Anwendung finden. Es ist anzunehmen, daß diese Gedanken auch noch für weitere, ähnlich gelagerte Abbildungsprobleme von Nutzen sein können und wir werden hier etwas ausführlicher darauf eingehen, als es im Zusammenhang mit der gestellten Aufgabe vielleicht nötig wäre.

§ 1. Aufstellung und geometrische Deutung der Eigenwertprobleme.

F. Klein hat gezeigt, daß gewisse Eigenwertprobleme, die im Zusammenhang mit der Laméschen Differentialgleichung auftraten, sich an Hand der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen leicht geometrisch deuten lassen[2]). Es werden bei diesen Eigenwertaufgaben die Randbedingungen für solche Randpunkte vorgeschrieben, die singuläre Stellen der zugehörigen

[1]) Ullrich, E.: „Konforme Abbildung eines Streifens mit Halbkreiskerbe." Z. angew. Math. Mech. **25/27**, 133 (1947).

[2]) Klein, F.: Ges. Werke II, S. 540. Gött. Nachr. **1890**.

Differentialgleichung sind. Sei also etwa

$$y'' + p(x)\,y' + [q(x) + \lambda\, g(x)]\,y = 0 \tag{1}$$

die gegebene Differentialgleichung mit für reelle x reellwertigen Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$. Sie habe an den Stellen $x = e_1$ und $x = e_2$ außerwesentliche Singularitäten mit den reellen charakteristischen Exponenten $\alpha_\nu \geqq \beta_\nu$ $(\nu = 1, 2)$, die nicht von λ abhängen sollen. Es gibt also zu den Stellen e_ν je ein System von sog. *kanonischen* Lösungen der Differentialgleichung (1), die in der Umgebung dieser Stellen in Potenzreihen folgender Art entwickelt werden können[3]):

$$y_1^{(\nu)} = (x - e_\nu)^{\alpha_\nu}\,(1 + a_1(x - e_\nu) + a_2(x - e_\nu)^2 + \cdots)$$

$$y_2^{(\nu)} = C\,y_1^{(\nu)} \log (x - e_\nu) + (x - e_\nu)^{\beta_\nu}\,(1 + b_1(x - e_\nu) + \cdots),$$

wobei die Konstante C im logarithmischen Glied von $y_2^{(\nu)}$ nur dann $\neq 0$ ist, wenn $\delta_\nu = \alpha_\nu - \beta_\nu$ eine ganze Zahl ist. Das ganze übrige Intervall $e_1 < x < e_2$ sei frei von singulären Stellen der Differentialgleichung (1). Man kann dann vorschreiben, daß die Lösungen von (1) in den Randpunkten dieses Intervalls proportional zu gewissen der *kanonischen* Lösungen sein sollen, und solche Eigenwerte λ zu bestimmen suchen, für die derartige Lösungen existieren. In Betracht kommen vor allem die folgenden *Randbedingungen*:

1). y proportional zu $y_1^{(1)}$ in der Umgebung von e_1 und proportional zu $y_1^{(2)}$ in der Umgebung von e_2, d.h. es muß sein:

$$y_1^{(1)} = k\,y_1^{(2)} \quad \text{mit einer geeigneten Konstante } k.$$

2a). y in e_1 proportional zu $y_2^{(1)}$, in e_2 proportional zu $y_1^{(2)}$, d.h.

$$y_2^{(1)} = k\,y_1^{(2)}.$$

2b). y in e_1 proportional zu $y_1^{(1)}$, in e_2 proportional zu $y_2^{(2)}$, d.h.

$$y_1^{(1)} = k\,y_2^{(2)}.$$

3). y in e_1 proportional zu $y_2^{(1)}$, in e_2 proportional zu $y_2^{(2)}$, d.h.

$$y_2^{(1)} = k\,y_2^{(2)}.$$

Ferner soll die Eigenfunktion y im Intervall $e_1 < x < e_2$ eine vorgeschriebene Anzahl von n Nullstellen $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ besitzen. Es ist hierdurch der Eigenwert λ eindeutig bestimmt. Untersuchungen über die Lösbarkeit dieser Eigenwertprobleme findet man bei BÔCHER[4]). In unseren nachher zu diskutierenden Spezialfällen wird sich die Existenz der Eigenwerte und Eigenfunktionen direkt ergeben, so daß wir hier nicht näher darauf einzugehen brauchen.

---

[3]) Siehe etwa SCHLESINGER, L.: Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichung auf funktionentheoretischer Grundlage, S. 162. Berlin u. Leipzig 1922.

[4]) BÔCHER, M.: Enz. math. Wiss. II (Analysis) 1,1, S. 447 und die dort angegebene Literatur.

Singularitäten wie die eben diskutierten spielen eine besondere Rolle bei der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen. Man wird hier auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der FUCHSschen Klasse geführt, d.h. auf Differentialgleichungen, die in der vollen x-Ebene einschließlich des Punktes $x=\infty$ höchstens Singularitäten der genannten Art besitzen. Sind die Koeffizienten einer solchen Differentialgleichung für reelle x reellwertig und sind die singulären Punkte e_ν sowie die zugehörigen Exponentendifferenzen $\delta_\nu=\alpha_\nu-\beta_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$ reelle Größen, so bildet der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen dieser Differentialgleichung $\eta=y_1/y_2$ die obere Halbebene $\Im(x)>0$ auf ein Kreisbogen-n-Eck ab. Die n-singulären Stellen $e_1, e_2, \ldots, e_n$ gehen dabei in die n Ecken des Polygons über, die dort Innenwinkel der Größe $\delta_\nu\pi$ einschließen. Umgekehrt gibt es zu jedem beliebigen Kreisbogenpolygon eine Differentialgleichung dieses Typus, mit deren Hilfe man das Abbildungsproblem lösen kann.

Es erhebt sich nun die Frage, welche Bedeutung die eben formulierten Randbedingungen für die Gestalt des zugehörigen Kreisbogenpolygons haben, wenn man sie auf Differentialgleichungen dieser Art anwendet. Wir wollen hierzu zunächst einige Festsetzungen treffen: Dem Intervall $e_1\leq x\leq e_2$ entspricht bei der konformen Abbildung durch $\eta(x)$ eine Polygonseite, die wir mit s_0 bezeichnen wollen; die links und rechts anschließenden Seiten bezeichnen wir mit s_{-1} und s_{+1}. Die den singulären Stellen e_1 und e_2 entsprechenden Ecken seien ε_1 und ε_2. Ist δ_1 keine ganze Zahl, so schneiden sich die Kreise, auf denen s_0 und s_{-1} liegen, außer in ε_1 noch in einem zweiten Punkt ε_1', den wir als die zu ε_1 gehörige „Gegenecke" bezeichnen wollen. Ebenso existiert zu ε_2 die Gegenecke ε_2', falls δ_2 keine ganze Zahl ist.

Wir betrachten nun den Quotienten der zu e_1 gehörigen kanonischen Lösungen

$$\eta^{(1)}=\frac{y_1^{(1)}}{y_2^{(1)}}.$$

Die Größen $(x-e_1)^{\alpha_1}$, $(x-e_1)^{\beta_1}$ und $\log(x-e_1)$ seien so festgelegt, daß $y_1^{(1)}$ und $y_2^{(1)}$ für $e_1<x<e_2$ reelle Werte annehmen. Dann ist $\eta^{(1)}(e_1)=\varepsilon_1=0$ und s_0 verläuft von $\varepsilon_1=0$ aus längs der positiv reellen Achse. Ist δ_1 keine ganze Zahl, so ist auch s_{-1} eine gerade Linie, die von ε_1 aus längs des Strahles $\arc\eta_2^{(1)}=\delta_1\pi$ läuft, und die Gegenecke zu ε_1 ist $\varepsilon_1'=\infty$. Entsprechend wird bei der Abbildung durch

$$\eta^{(2)}=\frac{y_1^{(2)}}{y_2^{(2)}} \quad \text{die Ecke} \quad \varepsilon_2=\eta^{(2)}(e_2)=0$$

und die zugehörige Gegenecke, wenn vorhanden, $\varepsilon_2'=\infty$.

Wir wollen nun zunächst diejenigen Eigenfunktionen der Probleme 1) bis 3) betrachten, die im Intervall $e_1<x<e_2$ keine Nullstellen besitzen. Wir untersuchen dann, in welcher Weise dieses Intervall durch $\eta^{(1)}(x)$ auf s_0 abgebildet wird und insbesondere wie die Ecken ε_1 und ε_2 zueinander liegen, falls eine der Randbedingungen 1) bis 3) erfüllt ist.

Bedingung 1). Es ist hier

$$\eta^{(1)} = \frac{y_1^{(1)}}{y_2^{(1)}} = \frac{k\, y_1^{(2)}}{c_1 y_1^{(2)} + c_2 y_2^{(2)}},$$

d.h. bei der Abbildung durch $\eta^{(1)}(x)$ wird $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = 0$. Da wegen

$$\frac{d\eta^{(1)}}{dx} = \frac{y_1^{(1)\prime} y_2^{(1)} - y_1^{(1)} y_2^{(1)\prime}}{y_2^{(1)\,2}} > 0$$

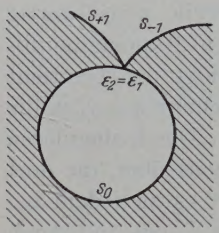

Fig. 3.

die reelle Achse von s_0 nur in einem Sinne durchlaufen wird und außerdem $y_1^{(1)}$ und damit auch $\eta^{(1)}$ keine weiteren Nullstellen für $e_1 < x < e_2$ besitzt, so ist s_0 gleich der genau einmal vollständig durchlaufenen reellen Achse. Kehren wir wieder zum Quotienten $\eta(x)$ zweier beliebiger linear unabhängiger Lösungen von (1) zurück, so wird die vollständig durchlaufene reelle Achse zu einem vollständig durchlaufenen Kreis. Es hat also das betrachtete Kreisbogenpolygon unabhängig von der speziellen Wahl des Quotienten $\eta(x)$ die Eigenschaft, daß seine Ecken ε_1 und ε_2 zusammenfallen und s_0 eine vollständige Kreisperipherie umfaßt (Fig. 3).

Bedingung 2a). Hier ist

$$\eta^{(1)} = \frac{y_1^{(1)}}{y_2^{(1)}} = \frac{c_1 \cdot y_1^{(2)} + c_2 \cdot y_2^{(2)}}{k \cdot y_1^{(2)}},$$

d.h. es wird $\varepsilon = \eta^{(1)}(e_2) = \infty$, s_0 läuft also, da $y_2^{(1)}$ für $e_1 < x < e_2$ keine Nullstellen haben soll und daher $\eta^{(1)}$ dort endlich bleibt, von $\varepsilon_1 = 0$ aus längs der positiv reellen Achse nach $\varepsilon_2 = \infty$. Wenn δ_1 keine ganze Zahl ist, was wir jetzt voraussetzen wollen, dann ist die Stelle $\eta^{(1)} = \infty$ gerade die Gegenecke ε_1' zu ε_1. Die Ecke ε_2 fällt also mit der Gegenecke ε_1' zusammen, und dies trifft natürlich unabhängig von der speziellen Wahl des Quotienten η zu. Das Kreisbogenpolygon ist hier also dadurch gekennzeichnet, daß die eine Seite s_0 das Stück des Kreisbogens zwischen Ecke ε_1 und Gegenecke ε_1' umfaßt (Fig. 4a).

Ganz Entsprechendes gilt für die

Bedingung 2b), nur daß hier ε_1 und ε_2 ihre Rollen vertauscht haben, daß hier also ε_1 mit der Gegenecke ε_2 zusammenfällt (Fig. 4b).

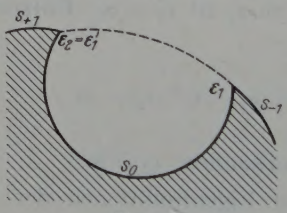

Fig. 4 a.

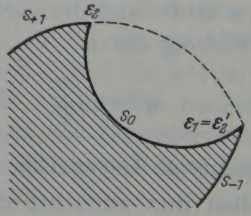

Fig. 4 b.

Bedingung 3). Hier ist

$$\eta^{(1)} = \frac{y_1^{(1)}}{y_2^{(1)}} = \frac{c_1 \cdot y_1^{(2)} + c_2 \cdot y_2^{(2)}}{k \cdot y_2^{(2)}} = \frac{c_1}{k}\,\eta^{(2)} + \frac{c_2}{k}.$$

Die Seite s_0 liegt also, wenn $y_2^{(1)}$ in $e_1 < x < e_2$ keine Nullstellen hat, ganz im Endlichen auf der positiv reellen Achse. Für die invariante Kennzeichnung des Kreisbogenpolygons ist es hier wesentlich, daß die beiden Gegenecken ε_1' und ε_2' zusammenfallen, falls diese Gegenecken existieren. Denn ε_2' liegt an der Stelle $\eta^{(2)} = \infty$ und das ist die Stelle $\eta^{(1)} = \infty$ d.h. ε_1'. Die Seite s_0 ist dann das Stück des Kreisbogens zwischen ε_1 und ε_2, das den Punkt $\varepsilon_1' = \varepsilon_2'$ nicht enthält (Fig. 5).

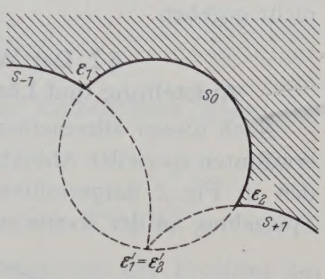

Fig. 5.

Hat die Eigenfunktion $y(x)$ im Intervall $e_1 < x < e_2$ noch n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ Nullstellen, dann muß s_0 bzw. die Punkte $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1' = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2'$, $\varepsilon_1' = \varepsilon_2'$ n-mal in seinem Inneren enthalten, was darauf hinauskommt, daß sich diese Seite noch zusätzlich n-mal überschlägt.

Von F. Klein und auf seine Anregung hin ist in vielfacher Weise versucht worden, diese Überlegungen dazu zu benutzen, die akzessorischen Parameter der Differentialgleichung zu bestimmen, wenn ein spezielles Kreisbogenpolygon vorgegeben ist. Bekanntlich enthält eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchsschen Klasse mit n singulären Stellen eine gewisse Anzahl von Parametern, die beliebig gewählt werden können, ohne daß die Differentialgleichung aufhört, zu dieser Klasse zu gehören. Es sind dies einmal die $2n$ charakteristischen Exponenten, dann die Lage der n singulären Stellen, und dazu treten noch $n-3$ sog. *akzessorische* Parameter. Wenn nun ein spezielles Kreisbogenpolygon vorgegeben ist, dann kennt man zwar den Typus der zugehörigen Differentialgleichung und auch die zugehörigen Exponentendifferenzen, nicht aber die Lage der singulären Stellen und auch nicht die *akzessorischen* Parameter, und hierin liegt eine der wesentlichsten Schwierigkeiten dieses Abbildungsproblems.

Wenn man nun aber einen der *akzessorischen* Parameter mit unserem Eigenwertparameter λ identifiziert und die Möglichkeit besteht, das Abbildungsproblem als Eigenwertproblem zu formulieren, so können wir hoffen, auf dem Wege über die Eigenwerttheorie diese Schwierigkeit wenigstens teilweise zu überwinden. Das Interesse von F. Klein richtete sich dabei vor allem auf die mit den Hauptkreisuniformisierenden zusammenhängenden Kreisbogenpolygone, doch sind hier — von einer Ausnahme abgesehen[5]) — wirklich befriedigende Ergebnisse nicht erzielt worden[6]). Auch der Versuch von E. Hilb[7]), Kreisbogenpolygone ganz allgemein auf diese Weise zu behandeln — wobei in großem Umfang Kontinuitätsbetrachtungen herangezogen werden müssen — kann nicht als sehr befriedigend bezeichnet werden. Von einem

[5]) Hilbert, D.: Lineare Integralgleichungen, S. 258—262. Leipzig u. Berlin 1912.

[6]) Einen zusammenfassenden Bericht über diese Arbeiten findet man bei Klein, F.: Math. Ann. **64**, 175 (1907). — Numerische Durchführung eines Beispiels bei Rothe, H.: Mh. Math. **19**, 258 (1908).

[7]) Hilb, E.: Math. Ann. **66**, 215 (1908); **68**, 24 (1910).

etwas anderen Standpunkt aus betrachtet J. PLEMELJ[8]) eine Klasse von Eigenwertproblemen, die im wesentlichen mit der von uns untersuchten übereinstimmt. Seine Untersuchungen sind jedoch rein theoretischer Natur — Hinweise für die rechnerisch-praktische Bewältigung des Problems werden nicht gegeben.

§ 2. Der Winkelraum mit Halbkreiskerbe. Aufstellung und Lösung des zugehörigen Eigenwertproblems.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wenden wir uns den zu Anfang erwähnten speziellen Abbildungsaufgaben zu, und zwar behandeln wir zunächst den in Fig. 2 dargestellten Bereich. Wir erweitern diesen Bereich durch Spiegelung an der Kerbe zu dem in Fig. 6 dargestellten Kreisbogenviereck[9]) Dieses Viereck besitzt vier gleiche Winkel der Größe $\delta\pi$. Wir wollen jetzt die Seite des Vierecks, die von $\varepsilon_2 = 0$ auf dem Halbstrahl arc $\eta = \delta\pi$ nach $\varepsilon_1 = \infty$ läuft, mit der Seite s_0 der Probleme des vorigen Paragraphen identifizieren. s_{-1} und s_{+1} sind dann die Stücke der reellen Achse zwischen ε_1 und ε_4, und zwischen ε_2 und ε_3. Es ist also hier sowohl $\varepsilon_1' = \varepsilon_2$ als auch $\varepsilon_1 = \varepsilon_2'$ und wir können daher hier sowohl ein *Problem* 2a) wie ein *Problem* 2b) aufstellen.

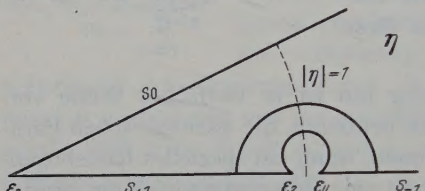

Fig. 6.

Die Differentialgleichung, auf die man zur Lösung dieses Abbildungsproblems geführt wird, ist im wesentlichen die LAMÉsche. Wir wollen sie in der folgenden Form ansetzen[10]):

$$(2)\quad \begin{cases} (x^2-1)(q\,x^2-1)\,y'' + 2(1-\delta)\,x\,[q\,(x^2-1) + (q\,x^2-1)]\,y' + \\ \qquad + 2(2\delta^2 - 3\delta + 1)(q\,x^2 + C)\,y = 0 \qquad (q \text{ reell} > 0). \end{cases}$$

Die singulären Stellen dieser Differentialgleichung sind die Punkte $x = \pm 1$ und $x = \pm q^{-\frac{1}{2}}$, sowie der Punkt $x = \infty$, in dessen Umgebung jedoch der Quotient $\eta(x)$ regulär ist[11]). Die charakteristischen Exponenten für die Stellen $x = \pm 1, \pm q^{-\frac{1}{2}}$ sind $\alpha_\nu = \delta$, $\beta_\nu = 0$.

Es soll nun das Intervall $e_1 = -1 \leq x \leq +1 = e_2$ auf s_0 abgebildet werden, d.h. der *akzessorische* Parameter C muß so bestimmt werden, daß die *kanonischen* Lösungen $y_2^{(1)}$ und $y_1^{(2)}$, und andererseits auch $y_1^{(1)}$ und $y_2^{(2)}$ zueinander

[8]) PLEMELJ, J.: Mh. Math. **43**, 321 (1936).

[9]) Für die numerische Behandlung ist dies zweckmäßig. An und für sich läßt sich auch für das ursprüngliche Gebiet von Fig. 2 ein Eigenwertproblem formulieren.

[10]) In der üblichen Form geschrieben, hat die LAMÉsche Differentialgleichung die vier singulären Stellen $x = e_1, e_2, e_3$ und $x = \infty$ mit den Exponentendifferenzen $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ und δ. Ihre Lösungsquotienten $\eta(x)$ bilden die obere Halbebene auf eines der vier Teile ab, in die das Kreisbogenviereck von Fig. 6 unterteilt ist. Um zur Form (2) der LAMÉschen Differentialgleichung zu gelangen, wird die Variable x noch einer rationalen Transformation unterworfen.

[11]) Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir die vier singulären Stellen so verteilen, denn durch eine lineare Transformation der x-Ebene lassen sich vier beliebig verteilte Punkte stets auf diese Form bringen.

proportional werden, und daß außerdem diese *kanonischen* Lösungen im Intervall $-1<x<1$ keine Nullstellen besitzen. Wir erhalten dann die Abbildungsfunktion, die die obere Halbebene $\Im(x)>0$ auf das in Fig. 6 dargestellte Viereck abbildet, als ein Vielfaches des Quotienten der zum Punkt $x=1$ gehörigen *kanonischen* Lösungen

$$\eta(x)=k\,\eta^{(2)}(x)=k\,\frac{y_1^{(2)}(x)}{y_2^{(2)}(x)},$$

wobei wir die Größe k so wählen wollen, daß der Einheitskreis $|\eta|=1$ das Viereck in zwei symmetrische Teile zerlegt.

Durch die Transformation

$$z(x)=(x-1)^{-\delta}\,y(x) \quad \text{bzw.} \quad z^*(x)=(x+1)^{-\delta}\,y(x)$$

können wir erreichen, daß die gesuchten Eigenfunktionen der *Probleme* 2a) *bzw.* 2b) in den Endpunkten $x=\pm 1$ des untersuchten Intervalls regulär werden. So erhalten wir schließlich die beiden Eigenwertprobleme mit $z(x)$ bzw. $z^*(x)$ als Eigenfunktionen:

$$(3\,a)\quad \begin{aligned}&(x^2-1)\,(q\,x^2-1)\,z''+2\,[(x+\delta)\,(q\,x^2-1)+(1-\delta)\,q\,x\,(x^2-1)]\,z'+\\&\quad+q\,[(1-\delta)\,(2-\delta)\,x^2+\delta\,(1-\delta)\,x]\,z+\lambda\,z=0\end{aligned}$$

bzw.

$$(3\,b)\quad \begin{aligned}&(x^2-1)\,(q\,x^2-1)\,z^{*\prime\prime}+2\,[(x-\delta)\,(q\,x^2-1)+(1-\delta)\,q\,x\,(x^2-1)]\,z^{*\prime}+\\&\quad+q\,[(1-\delta)\,(2-\delta)\,x^2-\delta\,(1-\delta)\,x]\,z^*+\lambda\,z^*=0\end{aligned}$$

mit den Randbedingungen, daß z, z^* regulär sein sollen für $x=\pm 1$ und außerdem im Intervall $-1<x<1$ keine Nullstellen haben sollen.

Man stellt leicht fest, daß $z^*(x)=z(-x)$ eine Lösung des *Problems* (3b) ist, wenn $z(x)$ das *Problem* (3a) löst. Es ist dann

$$y_1=(x-1)^{\delta}\,z(x), \qquad y_2=(x+1)^{\delta}\,z(-x)$$

ein Paar von linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung (2), deren Quotient

$$(4)\qquad \eta(x)=\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\delta}\frac{z(x)}{z(-x)}$$

die obere Halbebene $\Im(x)>0$ gerade in der geforderten Weise auf das Viereck von Fig. 6 abbildet. Wir brauchen also nur eine Eigenfunktion des *Problems* (3a) aufzusuchen.

Zur praktischen Lösung des Problems empfiehlt sich die Anwendung der sog. *Störungsrechnung*. Diese ist im Prinzip schon von V. Fock in seiner Arbeit über Kreisbogenvierecke mit Nullwinkeln angewandt worden[12]), allerdings ohne ausreichende theoretische Begründung. Wir setzen hierzu voraus — weiter unten in § 6 werden wir den Beweis hierfür nachtragen — daß der Eigenwert λ und die Eigenfunktion $z(x)$ sich nach Potenzen des Parameters q

[12]) Fock, V.: J. reine angew. Math. **161**, 137 (1929).

entwickeln lassen. Es gelte also für hinreichend kleine $|q|$ die Entwicklung:

$$\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu q^\nu, \qquad z(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} q^\nu z_\nu(x). \tag{5}$$

Wenn wir dies in (3a) einsetzen und nach Potenzen von q ordnen, erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$L_0(z_0) - \lambda_0 z_0 = 0 \tag{6.0}$$

$$L_0(z_1) - \lambda_0 z_1 = L_1(z_0) + \lambda_1 z_0 \tag{6.1}$$

$$L_0(z_2) - \lambda_0 z_2 = L_1(z_1) + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_0 \tag{6.2}$$

. . . .

ist dann ein *Polynom* 2ν*-ten Grades*. Wir bestimmen dann wieder λ_ν so, daß auch $z_\nu(x)$ ein *Polynom* 2ν*-ten Grades* wird, wobei wir über die freie additive Konstante in $z_\nu(x)$ wieder in der Weise verfügen wollen, daß $z_\nu(x) = 0$ wird für $x = -1$. Im übrigen sieht man leicht, daß die spezielle Art der Normierung der Funktionen $z_\nu(x)$ für die endgültige Lösung ohne Bedeutung ist; eine andere Art der Normierung bewirkt nur die Multiplikation der ursprünglichen Lösung mit einem konstanten Faktor, der sich bei der Quotientenbildung wieder heraushebt. Zu achten ist lediglich darauf, daß dieser konstante Faktor — der als Potenzreihe in q erscheint — für die in Betracht kommenden Werte von q konvergiert.

Unter der Voraussetzung der Konvergenz der Reihen (5) erhalten wir also eine Lösung unseres Eigenwertproblems in Form einer Potenzreihe

$$z(x) = z_2^{(1)}(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q^\nu \sum_{\varkappa=0}^{2\nu} a_\varkappa^{(\nu)} x^\varkappa. \tag{7}$$

§ 3. Diskussion der Abbildungsfunktion.

Die Funktion $z(x)$ ist als Lösung unseres Eigenwertproblems für $x = \pm 1$ regulär und daher auch als Lösung der Differentialgleichung (3a) im ganzen Kreis $|x| < q^{-\frac{1}{2}}$. Sie besitzt — was wir später noch genauer nachweisen werden — in $-1 < x < 1$ keine Nullstellen, und kann daher auf Grund der daraus folgenden Abbildungseigenschaften des Quotienten $\eta(x)$ zumindest für $\delta < 1$ im Kreis $|x| < q^{-\frac{1}{2}}$ keine Nullstellen haben. Denn $z(x) = 0$ hat ja auch $\eta(x) = 0$ zur Folge, das Gebiet, auf das der Kreis $|x| < q^{-\frac{1}{2}}$ durch $\eta(x)$ abgebildet wird, hat aber den Punkt $\eta = 0$ für $\delta < 1$ sicher nicht in seinem Inneren. [Abgesehen von der Ecke ε_2, die der Stelle $x = 1$ entspricht, die sicher keine Nullstelle von $z(x)$ ist.] Der Quotient

$$\frac{z(x)}{z(-x)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} q^\nu \sum_{\mu=1}^{2\nu-1} c_\mu^{(\nu)} x^\mu \tag{8}$$

läßt sich also in eine für $|x| < q^{-\frac{1}{2}}$ konvergente Potenzreihe entwickeln[13]).

Für die analytische Fortsetzung der Funktion $\eta(x)$ über den Kreis $|x| < q^{-\frac{1}{2}}$ hinaus können wir das SCHWARZsche Spiegelungsprinzip benutzen. Das Viereck von Fig. 6 war so entstanden, daß wir dem Viereck von Fig. 2 sein Spiegelbild an der Halbkreiskerbe hinzufügten. Die Halbkreiskerbe zerlegt also das Viereck, in das die obere Halbebene $\Im(x) > 0$ bei der konformen Abbildung durch $\eta(x)$ übergeht, in zwei symmetrische Teile. Es muß ihr in der x-Ebene eine Kurve entsprechen, die die obere Halbebene in zwei symmetrische Teile zerlegt, und das ist, wie man leicht sieht, der Halbkreis mit $|x| = q^{-\frac{1}{4}}$. Es wird also durch $\eta(x)$ das Gebiet $\Im(x) > 0$, $|x| < q^{-\frac{1}{4}}$ auf einen Winkelraum mit Halbkreiskerbe abgebildet, und durch fortgesetzte Spiegelung an dem Kreis $|x| = q^{-\frac{1}{4}}$ und an der reellen x-Achse läßt sich $\eta(x)$ beliebig in der an den Stellen $x = \pm 1$, $\pm q^{-\frac{1}{2}}$ punktierten Ebene fortsetzen.

[13]) Bei der Quotientenbildung verschwinden gewisse Entwicklungskoeffizienten, was in Formel (8) berücksichtigt wurde.

Diese Überlegungen können wir auch dazu benutzen, um unabhängig von der Differentialgleichung die Entwicklungskoeffizienten in (8) zu bestimmen. Wir transformieren hierzu die η-Ebene gemäß

$$\eta^* = \frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

Unser Kreisbogenviereck erhält dann die folgende Gestalt (Fig. 7).

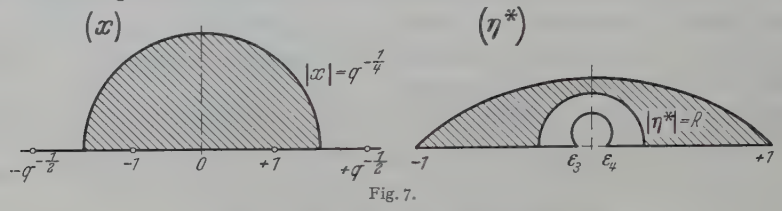

Fig. 7.

Die Funktion $\eta^*(x)$ wollen wir in der folgenden Form schreiben:

$$\eta^*(x) = \frac{\frac{z(x)}{z(-x)} - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\delta}{\frac{z(x)}{z(-x)} + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\delta}.$$

$\eta^*(x)$ bildet den Halbkreis $\Im(x) > 0$, $|x| < q^{-\frac{1}{4}}$ auf das in Fig. 7 schraffierte Gebiet ab und insbesondere geht dabei der Kreis $|x| = q^{-\frac{1}{4}}$ in den Kreis $|\eta^*| = R$ über, dessen Radius R noch von der speziellen Gestalt des Vierecks abhängt. Wir wollen diese Größe R zur genaueren Kennzeichnung des Vierecks benutzen.

Es gilt also nach dem SCHWARZschen Spiegelungsprinzip die folgende Relation:

(9) $$\eta^*(x) = \frac{R^2}{\bar{\eta}^*\left(\frac{q^{-\frac{1}{2}}}{\bar{x}}\right)},$$

wenn $\bar{\eta}^*$ und $\bar{x}$ die zu η^* und x konjugiert komplexen Werte sind. Wir entwickeln nun die Größe

(10) $$\frac{z(x)}{z(-x)} \pm \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}\right)^\delta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c_\mu^{\pm(\nu)} q^\nu x^\mu$$

in eine für $1 < |x| < q^{-\frac{1}{2}}$ konvergente Potenzreihe. Dabei ist $c_0^{-(0)} = 2$, $c_0^{-(0)} = 0$, $c_\mu^{\pm(0)} = \pm b_\mu$ $(\mu > 0)$, wenn b_μ der Entwicklungskoeffizient von x^μ bei der Potenzreihenentwicklung von $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\delta$ ist, und für $\nu > 0$ ist $c_\mu^{\pm(\nu)} = c_\mu^{(\nu)}$, d.h. gleich dem Entwicklungskoeffizienten aus (8). Ferner sei:

(11) $$R^2 = q^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu q^\nu \text{ [14]}.$$

[14]) Man sieht leicht, daß die Entwicklung von R^2 diese Gestalt haben muß, wenn man in $\eta^*(x)$ $x = q^{-\frac{1}{4}}$ setzt.

Setzt man dies nun in (9) ein, multipliziert die Nenner herauf und ordnet nach Potenzen von q und x — wobei noch zu berücksichtigen ist, daß $\bar{z}(\bar{x}) = z(x)$ ist — so erhält man folgendes Gleichungssystem in den $c_\mu^{-(\nu)}$ und r_ν:

$$(12) \qquad \sum_{\substack{\mu_1 - \mu_2 = \mu \\ 2\nu_1 - 2\nu_2 - \mu_2 = \nu \\ (\nu = 1, 2, 3, \ldots \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \nu)}} c_{\mu_1}^{-(\nu_1)} c_{\mu_2}^{-(\nu_2)} = \sum_{\substack{\mu_1 - \mu_2 = \mu \\ 2\nu_1 + 2\nu_2 + 1 - \mu_2 = \nu}} r_{\nu_2} c_{\mu_1}^{+(\nu_1)} c_{\mu_2}^{+(\nu_2)}.$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich leicht nach den gesuchten Entwicklungskoeffizienten $c_\mu^{(\nu)}$ aus (8) und r_ν aus (11) auflösen. In den einzelnen Gleichungen des Systems (12) treten jeweils nur endlich viele der $c_\mu^{(\nu)}$ wirklich auf, da diese Koeffizienten für $\mu > 2\nu - 1$ verschwinden, und in der angegebenen Reihenfolge aufgestellt, tritt in jeder neuen Gleichung höchstens eine neue Unbekannte auf, so daß wir die gesuchten Größen leicht sukzessive berechnen können. Dies ist wesentlich einfacher, als wenn wir diese Größen aus der Differentialgleichung bestimmen wollten. Zudem enthält das System (12) eine größere Anzahl überzähliger Gleichungen, die zur rechnerischen Kontrolle dienen können.

§ 4. Der Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe.

Wir wollen jetzt untersuchen, inwieweit wir unser Verfahren auf den Fall $\delta = 0$ ausdehnen können. Zunächst stellen wir fest, daß in diesem Fall die Differentialgleichungen (2), (3a) und (3b) einander gleich werden. Abgesehen davon können wir aber das Eigenwertproblem in genau derselben Weise formulieren und auch mit denselben Methoden behandeln; die hier angestellten Überlegungen sind in keiner Weise von der Größe von δ abhängig. Nur wird in diesem Falle $z(x) = z^*(x)$ und wir können also nicht mehr mittels (4) zu $\eta(x)$ übergehen. Wir müssen uns aber zunächst überhaupt fragen, was für ein Kreisbogenviereck wir bei der konformen Abbildung durch den Quotienten $\eta(x)$ in diesem Falle erhalten.

Die *kanonischen* Lösungen von (2) für die Stellen $x = \pm 1$ lauten jetzt:

$$y_1^{(\nu)} = 1 + a_1(x \mp 1) + a_2(x \mp 1)^2 + \cdots$$

$$y_2^{(\nu)} = C\, y_1^{(\nu)} \log(x \mp 1) + 1 + b_1(x \mp 1) + b_2(x \mp 1)^2 + \cdots \quad (\nu = 1, 2),$$

wo diesmal sicher $C \neq 0$ ist. Das Auffinden einer in $x = \pm 1$ regulären Lösung von (2) [bzw. (3a, b)] bedeutet also nicht mehr die Lösung eines *Problems* 2a), 2b), sondern die Lösung eines *Problems* 1). Die dem Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ entsprechende Seite s_0 muß also jetzt eine *volle Kreisperipherie* umfassen. Wir erhalten ein solches Viereck, wenn wir bei dem zu Anfang erwähnten Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe diesen Bereich an der Kerbe spiegeln. So entsteht das in Fig. 8 dargestellte Viereck mit den vier Winkeln $\delta\pi = 0$. Die Viereckseite, die auf der Geraden

$$\eta = t + \frac{\pi i}{2} \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

liegt und die in der Tat einer vollen Kreisperipherie äquivalent ist, soll mit unserer Seite s_0 identifiziert werden, d.h. sie soll bei der konformen Abbildung durch $\eta(x)$ ein Bild des Intervalls $-1 \leqq x \leqq +1$ werden.

Wir müssen jetzt nur noch aus der Eigenfunktion $z(x) = z^*(x)$ den Quotienten $\eta(x)$ wirklich bilden. Dazu können wir so vorgehen: Bekanntlich erhält

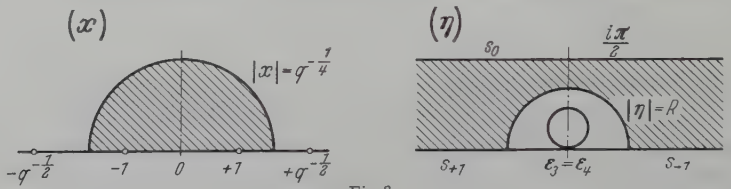

Fig. 8.

man, wenn eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ bekannt ist, eine dazu linear unabhängige durch:

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp - \int p(x)\, dx}{y_1^2}\, dx .$$

In unserem Falle ist also

$$\eta(x) = \int \frac{q-1}{(x^2-1)\,(q\,x^2-1)\,z^2(x)}\, dx , \tag{13}$$

wo $z(x)$ die nach den Methoden des § 2 gewonnene Eigenfunktion für $\delta = 0$ sein soll, d.h. es ist $z(x)$ die für $x = \pm 1$ reguläre Lösung von (3a) [und auch von (3b), d.h. es ist $z(x) = z(-x)$], die so normiert sein soll, daß $z(x) = 1$ für $x = \pm 1$. Da diese Funktion im Kreise $|x| < q^{-\frac{1}{2}}$ regulär und $\neq 0$ ist, was wir in derselben Weise wie zu Beginn des § 3 feststellen können, läßt sich der Integrand in diesem Kreise in eine Potenzreihe der folgenden Form entwickeln[15]:

$$\frac{q-1}{(x^2-1)\,(q\,x^2-1)\,z^2(x)} = \frac{1}{x^2-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} q^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu-1} d_\mu^{(\nu)}\, x^{2\mu}.$$

Daraus ergibt sich für $\eta(x)$ eine für $|x| < q^{-\frac{1}{2}}$ gültige Entwicklung der Form:

$$\eta(x) = \frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1,3,\ldots}^{2\nu-1} c_\mu^{(\nu)}\, q^\nu\, x^\mu. \tag{14}$$

Die analytische Fortsetzung von $\eta(x)$ über diesen Bereich hinaus kann, ähnlich wie im vorigen Paragraphen, auf Grund der Überlegung geschehen, daß der Halbkreis mit $|\eta| = R$ eine Symmetrielinie des Vierecks von Fig. 8 ist. $\eta(x)$ bildet also das Gebiet $\Im(x) > 0$, $|x| < q^{-\frac{1}{2}}$ auf einem Parallelstreifen mit Halbkreiskerbe (Fig. 1) ab. Dies führt auf die der Gl. (9) genau entsprechenden Symmetrierelation:

$$\eta(x) = \frac{R^2}{\overline{\eta\left(\frac{q^{-\frac{1}{2}}}{\bar{x}}\right)}}. \tag{15}$$

[15]) Auch hier fallen gewisse Entwicklungskoeffizienten fort, was in (14) berücksichtigt wird.

Außer zur analytischen Fortsetzung läßt sich Relation (15) wieder dazu benutzen, die Größen $c_\mu^{(\nu)}$ aus (14) zu berechnen.

Dazu entwickeln wir die Größe R, die der Größe R des vorigen § 3 genau entspricht und wie diese zur genauen Kennzeichnung des Vierecks dienen kann, wie in Formel (11):

$$R^2 = q^{\frac{1}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu q^\nu .$$

Weiter entwickeln wir $\eta(x)$ in eine für $1 < |x| < q^{\frac{1}{2}}$ konvergente LAURENT-Reihe:

$$\eta(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c_\mu^{(\nu)} q^\nu x^\mu$$

mit $c_\mu^{(0)} = 1/\mu$ $(\mu = -1, -3, -5, \ldots)$ und für $\nu > 0$, $\mu = 1, 3, \ldots, 2\nu - 1$ $c_\mu^{(\nu)} = c_\mu^{(\nu)}$ aus Formel (14). In (15) eingesetzt, die Nenner heraufmultipliziert und nach Potenzen von x und q geordnet, ergibt das:

(16)
$$\sum_{\substack{\mu_1 - \mu_2 = \mu \\ 2\nu_1 + 2\nu_2 - \mu_2 = \nu \\ (\nu = 1, 3, 5, \ldots \\ \mu = 2, 4, 6, \ldots, <\nu)}} c_{\mu_1}^{(\nu_1)} c_{\mu_2}^{(\nu_2)} = 0,$$

(17)
$$\sum_{\substack{\nu_1 + \nu_2 - \frac{\mu+1}{2} = \nu \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots)}} c_\mu^{(\nu_1)} c_\mu^{(\nu_2)} = r_\nu .$$

Dieses Gleichungssystem hat dieselbe Gestalt wie das System (12), und es gilt das dort Gesagte sinngemäß auch hier. Die Berechnung der $c_\mu^{(\nu)}$ und r_ν gestaltet sich hier sogar noch erheblich einfacher, da die einzelnen Gleichungen hier einfacher gebaut sind.

§ 5. Verwendung der WEIERSTRASSschen Form der LAMÉschen Differentialgleichung.

Für die praktische Rechnung ist es bisweilen von Vorteil, statt von der Form (2) von der WEIERSTRASSschen Form der LAMÉschen Differentialgleichung auszugehen. Dies empfiehlt sich besonders dann, wenn R nahekommt seinem *Maximalwert*

$$R_{\max} = 1 - \cos \pi\delta \quad \text{bzw. für} \quad \delta = 0, \qquad R_{\max} = \frac{\pi}{2},$$

weil unser bisheriges Verfahren dann nicht mehr schnell genug konvergiert. Allerdings muß dann noch eine konforme Abbildung der oberen Halbebene auf ein Rechteck oder einen Kreisringsektor dazwischengeschaltet werden, was die Rechenarbeit wieder vergrößert. Wir wollen dieses Verfahren kurz skizzieren.

Wir gehen aus von der Differentialgleichung

(18)
$$\frac{d^2 y}{dv^2} = [n(n+1)\wp(v) + B]\, y .$$

Die WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion $\wp(v)$ habe eine reelle Periode $\omega_1 = \pi$ und eine rein imaginäre Periode $\omega_2 = iK$ und es sei $n = \delta - \frac{1}{2}$. Dann wird das

Periodenrechteck $0<\Re(v)<\pi$, $0<\Im(v)<K$ durch den Quotienten $\eta(v)$ zweier linear unabhängiger Lösungen von (18) auf ein Kreisbogenviereck mit den vier Winkeln $\delta\pi$ abgebildet, und bei geeigneter Wahl von B erhält man Vierecke des Typus von Fig. 6 bzw. für $\delta=0$ des Typus von Fig. 8.

Wir führen jetzt in bekannter Weise die Größe $h=e^{i\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}}=e^{-K}$ ein[16]) und entwickeln $\wp(v)$ in eine Trigonometrische Reihe. Wir erhalten dann:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{d^2y}{dv^2}=n(n+1)\left[\frac{1}{\sin^2 v}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\,h^{2n}}{1-h^{2n}}\cos 2nv+B_1\right]. \tag{18a}$$

Mit $u=\cos v$ geht diese Differentialgleichung über in:

$$(u^2-1)\cdot y''+u\cdot y'+\left(\frac{1}{4}-\delta^2\right)\left[\frac{1}{u^2-1}+4\sum_{n=1}^{\infty}h^{2n}P_n(u^2)-B_1\right]y=0, \tag{19}$$

wo $P_n(u^2)$ ein Polynom n-ten Grades in u^2 ist.

Das uns interessierende Rechteck $0<\Re(v)<\pi$, $0<\Im(v)<K$ geht dabei in eine *Halbellipse* mit den Brennpunkten $u=\pm 1$ in der u-Ebene über. Die Stellen $u=\pm 1$ sind singuläre Stellen von (19) mit den charakteristischen Exponenten $\alpha=\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}$, $\beta=\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}$. Im übrigen ist das Intervall $-1<u<+1$ frei von singulären Stellen der Differentialgleichung (19). Die Forderung, daß dieses Intervall auf die Seite s_0 des Vierecks von Fig. 6 abgebildet werden soll, wenn die Halbellipse in der u-Ebene durch $\eta(u)$ in ein solches Viereck übergeht, führt also wieder auf ein *Eigenwertproblem des Typus* 2a) *und* 2b).

Durch die Transformation

$$z(u)=(u+1)^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}(u-1)^{-\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}}y(u)$$

$$z^*(u)=(u+1)^{-\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}}(u-1)^{-\frac{1}{4}+\frac{\delta}{2}}y(u)$$

können wir wieder erreichen, daß die gesuchten Eigenfunktionen an den Stellen $u=\pm 1$ regulär werden. An Hand der zugehörigen Differentialgleichung stellen wir fest, daß wieder $z^*(u)=z(-u)$ ist, so daß es also genügt, die Funktion $z(u)$ zu bestimmen und von da aus mit Hilfe von

$$\eta(u)=\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\delta}\frac{z(u)}{z(-u)} \tag{20}$$

zu der gesuchten Abbildungsfunktion $\eta(u)$ überzugehen.

$z(u)$ genügt der Differentialgleichung:

$$(u^2-1)\cdot z''+2(u+\delta)z'-(1-4\delta^2)\left[\sum_{n=1}^{\infty}h^{2n}P_n(u^2)+\lambda\right]\cdot z=0. \tag{21}$$

[16]) Beim Übergang von Differentialgleichung (2) zu (18) wird h zu einer auch leicht explizit anzugebenden Funktion von q. Die Größe h spielt hier dieselbe Rolle wie die Größe q in den Entwicklungen des § 2.

An den Stellen $u = \pm 1$ soll $z(u)$ regulär sein und im Intervall $-1 \leq u \leq +1$ keine Nullstellen besitzen. Zur Lösung dieses Problems wenden wir wieder die Störungsrechnung an, und zwar setzen wir jetzt voraus, daß λ und $z(u)$ sich nach Potenzen von h^2 entwickeln lassen:

$$\lambda = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu h^{2\nu}, \qquad z(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu(u)\, h^{2\nu}. \tag{22}$$

Setzen wir dies in (21) ein und ordnen nach Potenzen von h, so erhalten wir folgendes System von Differentialgleichungen:

$$L_0(z_0) - \lambda_0 z_0 = 0 \tag{23.0}$$

$$L_0(z_1) - \lambda_0 z_1 = (4\delta^2 - 1)\, z_0 (P_1 + \lambda_1) \tag{23.1}$$

. . . .

$$L_0(z_\nu) - \lambda_0 z_\nu = (4\delta^2 - 1)\left[\sum_{\mu=1}^{\nu} z_{\nu-\mu}(P_\mu + \lambda_\mu)\right], \tag{23.ν}$$

wo

$$L_0(z) = (u^2 - 1)\, z'' + 2(u + \delta)\, z'$$

dieselbe Bedeutung hat wie in dem ganz ähnlich gebauten System (6). Die dort angestellten Betrachtungen können auf das System (23) ohne weiteres übertragen werden und führen auch zu ganz ähnlichen Ergebnissen. Insbesondere wird $z_0(u) = 1$ und $z_\nu(u)$ ein *Polynom* 2ν*-ten Grades* in u, das wir wieder so normieren können, daß $z_\nu(u) = 0$ für $u = -1$ ist. Für die Funktion $\eta(u)$ ergibt sich daraus eine Entwicklung der folgenden Form:

$$\eta(u) = \left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\delta} \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{2\nu-1} d_\mu^{(\nu)} h^{2\nu} u^\mu\right). \tag{24}$$

Für die weitere Diskussion gehen wir zweckmäßig vom cos zur Exponentialfunktion über. Wir setzen

$$u = \tfrac{1}{2}(t + t^{-1}), \qquad \text{d.h. es ist} \quad t = e^{iv}.$$

Es wird dann

$$\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\delta} = \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{2\delta}$$

und

$$\frac{z(t)}{z(-t)} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} h^{2\nu} \left[c_0^{(2\nu)} + \sum_{\mu=1}^{2\nu-1} c_{\pm\mu}^{(2\nu)} (t^\mu + t^{-\mu})\right]. \tag{25}$$

Diese Entwicklung konvergiert für $\delta < 1$ und $h < |t| < h^{-1}$. Wir können uns dies folgendermaßen überlegen: Das uns interessierende Rechteck $0 < \Re(v) < \pi$, $0 < \Im(v) < K$ in der v-Ebene geht durch $t = e^{iv}$ in den halben Kreisring $\Im(t) < 0$, $h < |t| < 1$ über. Dieses Gebiet wird also durch $\eta(t)$ auf das Kreisbogenviereck von Fig. 6 abgebildet. Die singulären Stellen der Differentialgleichung (18) $v = m\pi + i\, nK$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$ gehen in die Stellen $t = h^n$ in der t-Ebene über und speziell die Stellen $v = 0$ und $v = \pi$ in die Stellen $t = \pm 1$. $z(t)$ ist

in den Stellen $t = \pm 1$ regulär und die für die Umgebung dieser Stellen konvergente LAURENT-Entwicklung konvergiert daher für $h < |t| < h^{-1}$. Für $\delta < 1$ hat $z(t)$ in diesem Gebiet auch keine Nullstellen, was wir durch dieselben Überlegungen wie zu Beginn des § 3 nachweisen können. Daher ist dann auch die Entwicklung des Quotienten $\frac{z(t)}{z(-t)}$ für $h < |t| < h^{-1}$ gültig.

Die Entwicklungskoeffizienten $c_\mu^{(\nu)}$ aus (25) können wir wieder unabhängig von der Differentialgleichung mit Hilfe einer Symmetrierelation berechnen. Da das Gebiet $\Im(t) > 0$, $h < |t| < 1$ auf das ganze Viereck von Fig. 6 durch $\eta(t)$ abgebildet wird, geht das Gebiet $\Im(t) > 0$, $h^{\frac{1}{2}} < |t| < 1$ in den Winkelraum

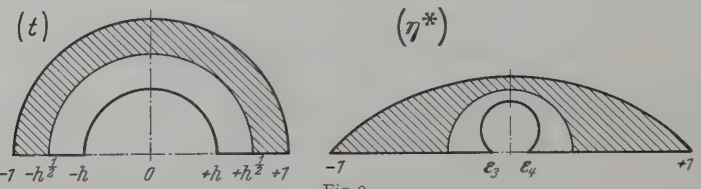

Fig. 9.

mit Halbkreiskerbe von Fig. 2 über. Wenn wir jetzt zu η^*, d.h. zu dem Viereck von Fig. 7 übergehen, dann geht bei der konformen Abbildung durch $\eta^*(t)$ der Kreis $|t| = h^{\frac{1}{2}}$ in den Kreis $|\eta^*| = R$ über (s. Fig. 9). Es gilt also die Relation:

$$\eta^*(t) = \frac{R^2}{\bar{\eta}^*\left(\frac{h}{t}\right)}. \tag{26}$$

Wir schreiben jetzt $\eta^*(t)$ in der Form

$$\eta^*(t) = \frac{\frac{z(t)}{z(-t)} - \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{2\delta}}{\frac{z(t)}{z(-t)} + \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{2\delta}}$$

und entwickeln die Größe

$$\frac{z(t)}{z(-t)} \pm \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{2\delta} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c_\mu^{\pm(\nu)} h^\nu t^\mu$$

in eine für $h < |t| < 1$ konvergente LAURENT-Reihe. Ferner setzen wir:

$$R^2 = h \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu h^{2\nu}. \tag{27}$$

Setzen wir dies in (26) ein, multiplizieren die Nenner herauf und ordnen nach Potenzen von h und t, so erhalten wir schließlich folgendes Gleichungssystem, das dem System (12) von § 3 genau entspricht:

$$\sum_{\substack{\mu_1 - \mu_2 = \mu \\ \nu_1 + \nu_2 + \mu_2 = \nu \\ (\nu = 1, 2, 3, \ldots \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \nu)}} c_{\mu_1}^{-(\nu_1)} c_{\mu_2}^{-(\nu_2)} = \sum_{\substack{\mu_1 - \mu_2 = \mu \\ \nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3 + 1 + \mu_2 = \nu}} r_{\nu_3} c_{\mu_1}^{+(\nu_1)} c_{\mu_2}^{+(\nu_2)} \tag{28}$$

In derselben Weise läßt sich auch das Viereck mit den vier Nullwinkeln (§ 4, Fig. 8) behandeln. Die Funktion $z(u)$ bestimmt sich auch für $\delta = 0$ aus

den Gln. (21) bis (23) und daraus gewinnt man die Funktion $\eta(u)$ mit Hilfe eines Integralansatzes wie in Formel (13). Wir gehen dann wieder zur t-Ebene über und erhalten für die Funktion $\eta(t)$ den folgenden für $h<|t|<h^{-1}$ gültigen Ansatz:

$$\eta(t)=\log\frac{1-t}{1+t}+\sum_{\nu=1}^{\infty}h^{2\nu}\sum_{\mu=1,3,\ldots}^{2\nu-1}c_{\pm\mu}^{(2\nu)}(t^{\mu}+t^{-\mu}). \tag{29}$$

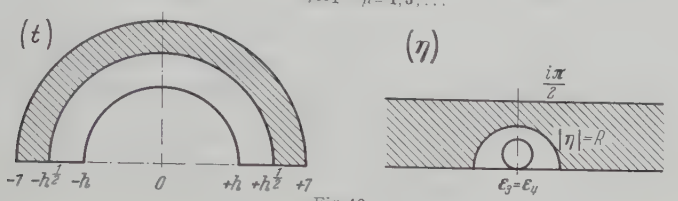

Fig. 10.

$\eta(t)$ bildet das Gebiet $\Im(t)>0$, $h<|t|<1$ auf das Viereck mit den vier Nullwinkeln ab, wobei der Kreis $|t|=h^{\frac{1}{2}}$ in den Kreis $|\eta|=R$ übergeht. Es gilt also wieder die Relation:

$$\eta(t)=\frac{R^2}{\overline{\eta\left(\frac{h}{t}\right)}}. \tag{30}$$

Setzen wir hierin die für $h<|t|<1$ konvergente LAURENT-Entwicklung von $\eta(t)$ ein,

$$\eta(t)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}c_{\mu}^{(\nu)}h^{\nu}t^{\mu}$$

sowie die Entwicklung für R^2

$$R^2=h\sum_{\nu=0}^{\infty}r_{\nu}h^{2\nu}$$

multiplizieren den Nenner herauf und ordnen nach Potenzen von h und t, so erhalten wir das den Gln. (16), (17) von § 4 entsprechende System:

$$\sum_{\substack{\mu_1-\mu_2=\mu\\ \nu_1+\nu_2-\mu_2=\nu\\ (\nu=1,3,5,\ldots)\\ \mu=2,4,6,\ldots<\nu)}}c_{\mu_1}^{(\nu_1)}c_{\mu_2}^{(\nu_2)}=0. \tag{31}$$

$$\sum_{\substack{\nu_1-\nu_2+\mu-1=2\nu\\ (\nu=0,1,2,\ldots)}}c_{\mu}^{(\nu_1)}c_{\mu}^{(\nu_2)}=r_{\nu}. \tag{32}$$

§ 6. Konvergenzbeweis.

Es bleibt jetzt noch der Nachweis für die Zulässigkeit der hier angeführten Entwicklungen zu führen. Wir betrachten hierzu zunächst die Differentialgleichung (3 a) bei beliebigen q und λ. Sie besitzt an den Stellen $x=+1$ und $x=-1$ *kanonische Lösungen*, die in der Umgebung dieser Stellen *regulär* sind:

$$z_2^{(1)}=1+a_1(q,\lambda)(x+1)+a_2(q,\lambda)(x+1)^2+\cdots$$
$$z_1^{(2)}=1+b_1(q,\lambda)(x-1)+b_2(q,\lambda)(x-1)^2+\cdots.$$

Diese beiden Funktionen $z_2^{(1)}, z_1^{(2)}$ sind natürlich im allgemeinen voneinander linear unabhängig, die WRONSKIsche Determinante

$$W(z_2^{(1)}, z_1^{(2)}) = z_2^{(1)} z_1^{(2)} - z_2^{(1)} z_1^{(2)} = D(q, \lambda)$$

gebildet für eine *feste reguläre Stelle* $x = x_0$ der Differentialgleichung ist eine wohlbestimmte Funktion von q und λ, die nicht identisch verschwindet. In unserem Eigenwertproblem war gefordert, daß die beiden *kanonischen Lösungen* $z_2^{(1)}, z_1^{(2)}$ zueinander proportional sein sollen, $D(q, \lambda)$ hat also Nullstellen für die und nur für die Werte von λ, die *Eigenwerte des Problems* (3a) sind. Sehen wir uns die Funktion $D(q, \lambda)$ einmal genauer an: Für $x = x_0 = 0$ gebildet, ist

$$z_2^{(1)} = 1 + a_1(q, \lambda) + a_2(q, \lambda) + \cdots$$

eine für alle λ und für $|q| < \frac{1}{4}$ gleichmäßig konvergente Reihe, deren Glieder die in q und λ rationalen Funktionen $a_\nu(q, \lambda)$ sind. $z_2^{(1)}$ ist also als Funktion von q und λ betrachtet zumindest in diesem Gebiet regulär analytisch[17]) und läßt sich also in der Umgebung von $q = 0$ und $\lambda = 0$ in eine Potenzreihe von q und λ entwickeln. Das gleiche gilt natürlich auch für $z_2^{(1)'}, z_1^{(2)}, z_1^{(2)'}$ an der Stelle $x = 0$ und somit auch für $D(q, \lambda)$. Genauer ist:

$$z_2^{(1)} = F\left(-n, n+1, 1-\delta; \frac{1-x}{2}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^{(1)}(\lambda)\, q^\nu$$

$$z_2^{(1)'} = \frac{d}{dx} F\left(-n, n+1, 1-\delta; \frac{1+x}{2}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^{(1)*}(\lambda)\, q^\nu$$

$$z_1^{(2)} = F\left(-n, n+1, 1+\delta; \frac{1-x}{2}\right) + \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu^{(2)}(\lambda)\, q^\nu$$

$$z_1^{(2)'} = \frac{d}{dx} F\left(-n, n+1, 1+\delta; \frac{1-x}{2}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^{2*}(\lambda)\, q^\nu,$$

wobei die hypergeometrischen Reihen $F(-n, \ldots)$, $\frac{d}{dx} F(-n, \ldots)$ an der Stelle $x = 0$ zu bilden sind und wir wieder $\lambda = n(n+1)$ (vgl. § 2) setzen. Die Entwicklung von $D(q, \lambda)$ berechnet sich daraus zu:

$$D(q, \lambda) = 2\frac{\delta}{\sin \pi\delta} \sin \pi n + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(\lambda)\, q^\nu.$$

$\sin \pi n$ ist als Funktion von λ betrachtet eine ganze transzendente Funktion, die an den Stellen $\lambda = n(n+1)$ für ganze $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ einfache Nullstellen hat. Für $q = 0$ und $\delta \neq \pm 1, \pm 2, \ldots$ hat also $D(q, \lambda)$ für diese Werte von λ einfache Nullstellen in λ. Nach den Sätzen über implizite Funktionen gibt also eine in einer gewissen Umgebung von $q = 0$ — sagen wir für

[17]) Genauer gilt, daß $z_2^{(1)}$ als Funktion von q im Kreise $|q| < 1$ regulär ist und über diesen Kreis hinaus auf der an den Stellen $q = 0, 1, \infty$ punktierten Ebene überallhin analytisch fortgesetzt werden kann.

$|q|<\varrho>0$ — regulär analytische Funktion

$$\lambda^{(n)}(q)=\lambda_0^{(n)}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu^{(n)}q^\nu \qquad (\lambda_0^{(n)}=n(n+1))$$

derart, daß $D\left(q,\lambda^{(n)}(q)\right)=0$ für alle q wird. Damit ist der erste Teil unserer Behauptung, die Entwickelbarkeit des Eigenwertes nach Potenzen von q, schon bewiesen.

Der zweite Teil, die Entwickelbarkeit der Eigenfunktion $z(x)$ nach Potenzen von q läßt sich daraus sehr einfach ableiten: Wir wollten $z(x)$ so normieren, daß es an der Stelle $x=-1$ gleich der kanonischen Lösung $z_2^{(1)}(x)$ ist, es ist also

$$z(x)=1+a_1\left(q,\lambda^{(n)}(q)\right)(x+1)+a_2\left(q,\lambda^{(n)}(q)\right)(x+1)^2+\cdots.$$

Die $a_\nu\left(q,\lambda^{(n)}(q)\right)$ sind nach dem eben Bewiesenen für $|q|<\varrho$ regulär analytische Funktionen. Da die Reihe für diese q und in der Umgebung von $x=-1$ absolut und gleichmäßig konvergiert, können wir nach Potenzen von q umordnen und erhalten so:

$$z(x)=z_0(x)+\sum_{\nu=1}^{\infty}q^\nu z_\nu(x).$$

Dabei ist $z_0(x)=F\left(-n,n+1,1-\delta,\frac{1+x}{2}\right)$, wenn $z(x)$ zum n-ten Eigenwert $\lambda^{(n)}$ gehört, und die $z_\nu(x)$ mit $\nu>0$ müssen an der Stelle $x=-1$ verschwinden.

Wir wollen noch zeigen, daß die zum Eigenwert $\lambda^{(n)}(q)$ gehörigen Eigenfunktionen $z(x)$ auch die geforderte Zahl von n *Nullstellen* besitzen. Für $q=0$ sieht man direkt, daß $z(x)=z_0(x)$ (s. oben) im Intervall $-1<x<+1$ n Nullstellen besitzt. Nun ist $z(x)$ für $|q|<\varrho$ jedenfalls eine stetige Funktion in q. Ändert sich also die Zahl der Nullstellen von $z(x)$ im Intervall $-1\leqq x\leqq+1$, wenn wir q von $q=0$ nach $q=\varrho$ wachsen lassen, so muß für irgendein $q=q_0$ $(0<q_0<\varrho)$ die Funktion $z(x)$ entweder in einem der Intervallendpunkte $x=\pm1$ verschwinden, oder im Intervall $-1<x<+1$ mehrfache Nullstellen haben. Beides ist aber unmöglich. In den Intervallendpunkten ist die an diesen Stellen reguläre Lösung jedenfalls $\neq0$ und im Inneren des Intervalls $-1<x<+1$ können die Lösungen der Differentialgleichung (3a) keine mehrfachen Nullstellen haben. Damit ist alles bewiesen.

In genau der gleichen Weise läuft der Beweis für die Konvergenz des Verfahrens von § 5, wo wir von der Weierstrassschen Form der Laméschen Differentialgleichung ausgingen und nach Potenzen von h^2 entwickelten. Wir brauchen daher hier nicht näher darauf einzugehen. Von Interesse wäre natürlich noch eine nähere Angabe über die Größe des Konvergenzradius ϱ. Besonders für die praktische Durchführung der Abbildungsaufgabe ist es erforderlich, daß das Verfahren nicht nur in einer kleinen Umgebung des Nullpunkts, sondern für alle in Betracht kommenden Fälle konvergiert, und darüber hinaus wäre auch eine Abschätzung des Fehlers, der beim Abbrechen der Reihe entsteht, wünschenswert. Verfahren zur Abschätzung der

Koeffizienten bei der Störungsrechnung sind unter anderen von F. Rellich[18]) und F. W. Schäfke[19]) angegeben worden, und diese Verfahren lassen sich auch ohne Schwierigkeiten auf unseren Fall übertragen. Sie liefern jedoch in unserem Falle wesentlich zu ungünstige Werte. Es wird hier nämlich als Hindernis für die analytische Fortsetzung der $\lambda^{(\nu)}(q)$ ein Zusammenfallen zweier Eigenwerte angenommen; eine derartige Singularität — d.h. eine Verzweigung der Funktion $\lambda^{(n)}(q)$ — bleibt aber in unserem Falle völlig außer Betracht, weil dann auch die zugehörigen Eigenfunktionen zusammenfallen müßten, was für reelle q wegen der verschiedenen Anzahl der Nullstellen der zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenfunktionen ausgeschlossen ist. Für komplexe q läßt sich eine ganz entsprechende Überlegung anstellen[20]). Daraus folgt, daß $\lambda^{(n)}(q)$ in der Umgebung jeder Stelle $q = q_0$ regulär ist, sofern nur das Eigenwertproblem für alle q dieser Umgebung lösbar ist, und Entsprechendes gilt natürlich auch für die Größe h. Es ist daher sehr plausibel, daß sowohl $|q| < 1$ als auch $|h| < 1$ das wahre Konvergenzgebiet unserer Reihen ist. Ein strenger Beweis hierfür dürfte allerdings außerordentlich schwierig zu führen sein, weil sich für die Existenz der Eigenwerte bei komplexen Parametern, d.h. bei nicht-selbstadjungierten Problemen, keine so einfachen und allgemeingültigen Aussagen machen lassen wie im reellen Bereich. Die praktische Rechnung bestätigt übrigens durchaus unsere Vermutung: Die Koeffizienten $c_\mu^{(\nu)}$ in unseren Formeln sind etwa von der Größenordnung $\frac{1}{\nu\mu}$.

[18]) Rellich, F.: Math. Ann. **117**, 356 (1940/41).

[19]) Schäfke, F. W.: Math. Nachr. **6**, 109 (1951).

[20]) J. Plemelj: definiert in der oben zitierten Arbeit eine *Oszillationszahl* und kann dadurch den Begriff der Oszillation einer reellen Funktion — d.h. der Anzahl ihrer Nullstellen in einem gegebenen Intervall — sinngemäß ins Komplexe fortsetzen.

Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 16. Mai 1953.)

Lorentz, G. G., and M. S. Macphail
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 231—246 (1953)

Direct theorems on methods of summability III: absolute summability functions.

By
G. G. Lorentz and M. S. Macphail.

1. Introduction. This paper is a continuation of the papers [4], [5], [6]. We begin by recapitulating the main definitions. If $\{p_\nu\}$ is an increasing sequence of positive integers, the value of the *counting function* $\omega(n) = \omega_p(n)$ is, for any $n \geqq 0$, the number of p_ν satisfying the inequality $p_\nu \leqq n$. Suppose that A is a linear method of summation corresponding to the transformation

$$1(1) \qquad \sigma_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} s_n \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Throughout this paper, $\Omega(n)$ is always a non-decreasing positive function defined for all real $n \geqq 0$ and tending to $+\infty$ with n. A function $\Omega(n)$ is a summability function of the first kind (s.f.1) for A if all real bounded sequences $\{s_n\}$ such that $s_i = 0$ except for a sequence $\{p_\nu\}$ of values of n with $\omega_p(n) \leqq \Omega(n)$, are A-summable, and $\Omega(n)$ is an *absolute summability function* (of the first kind) (a.s.f.) for A if all sequences $\{s_n\}$ of the kind just described are absolutely A-summable, that is, if $\sum |\sigma_{m-1} - \sigma_m| < +\infty$ for any such sequence. Furthermore, $\Omega(n)$ is a summability function of the second kind (s.f.2) for A if $S_n = s_0 + \cdots + s_n = O(\Omega(n))$ implies that $\{s_n\}$ is A-summable.

These definitions were all given in the papers above mentioned, and summability functions for various special methods were found. In particular, [6] gives every s.f.1 and s.f.2 for the Riesz and Abel methods (under certain assumptions), and every a.s.f. for the Cesàro, Euler-Knopp and Borel methods. In the present paper we shall find every a.s.f. for the Riesz, Abel and Hausdorff methods (under certain assumptions) with the aid of some general theorems on triangular methods, and it will appear that the sufficient condition given by equation 4.2(2) of [6] [see 2(1) below] is in many cases also necessary. (The question of a.s.f. for the Abel methods was left open in [6].) For the Riesz methods some additional results are given (§ 5), including in particular the conditions under which a given method A absolutely includes the Riesz methods. As an aid in the study of summability functions, we have introduced the notion of "convergence functions" (§ 2), which seem to be of some interest in themselves.

2. Convergence functions. The following result was given in [6, p. 245]. In order that $\Omega(n)$ be an a.s.f. for the method 1(1) in which $\sum |a_{0n}| < +\infty$,

This paper was written while the authors were members of the Summer Research Institute, Canadian Mathematical Congress, Kingston 1952.

it is sufficient that

$$2(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{var}_m a_{m p_\nu} < +\infty$$

for any sequence $p_1 < p_2 < \cdots$ with $\omega_p(n) \leqq \Omega(n)$. This result often enables us to determine the a.s.f. of a particular method exactly. To aid in the study of 2(1) we introduce the following definition:

Let $\sum u_n$ be a series of positive terms; $\Omega(n)$ is called a *convergence function* (c.f.) of $\sum u_n$ if $\sum u_{p_\nu}$ converges whenever $\omega_p(n) \leqq \Omega(n)$.

Thus for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for A, it is sufficient that $\Omega(n)$ be a c.f. for $\sum v_n$ where $v_n = \operatorname{var}_m a_{mn}$. We note that $\sum u_n$ has c.f. if and only if $u_n \to 0$, and that $\Omega(n) = n$ is a c.f. if and only if $\sum u_n$ converges.

In what follows, we shall give a little more about convergence functions than is required for immediate purposes of the study of a.s.f.

Theorem 1. *A function $\Omega(n)$ is a c.f. of $\sum u_n$ if and only if*

$$2(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{r} u_{q_\nu} = 0,$$

where $q = \{q_1, \ldots, q_r\}$ denotes an arbitrary finite sequence depending on n with $\omega_q(k) \leqq \Omega(k)$ and $q_1 \geqq n$. (This is a generalization of CAUCHY's convergence criterion.)

Proof. It is obvious that the condition is sufficient for $\Omega(n)$ to be a c.f. To prove its necessity, we show that among the series $\sum u_{p_\nu}$ with $\omega_p(n) \leqq \Omega(n)$ and sum $s(p)$ there is one with maximal sum. Let $M = \sup_p s(p)$ (we shall see later that $M < +\infty$); there is a sequence $p^{(t)}$ $(t = 1, 2, \ldots)$ of sequences with $s(p^{(t)}) \to M$ for $t \to \infty$. For each n there is an infinity of t such that the $p_\nu^{(t)}$ with $1 \leqq p_\nu^{(t)} \leqq n$ form the same finite set. By the diagonal method we can extract a subsequence of the $p^{(t)}$ in such a way that for *each* n and all sufficiently large t this set is the same. Then $p_\nu^{(t)} = p_\nu$ is constant for all large t; and $p = \{p_\nu\}$ has its counting function $\omega_p(n) \leqq \Omega(n)$, and $s(p) = \sum u_{p_\nu} = M$.

If p is chosen as before, we have also that $\sum_{\nu=s+1}^{\infty} u_{p_\nu}$ is greater than or equal to the sum $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{q_\nu}$ for any sequence q with $q_1 \geqq p_{s+1}$ and with a counting function $\omega_q(n) \leqq \Omega(n) - s$. Let $U_n = \max_{\nu \geq n} u_\nu$. Then for the q_ν of 2(2) we have, provided $q_1 \geqq p_{s+1}$,

$$\sum_{\nu=1}^{r} u_{q_\nu} \leqq s\, U_n + \sum_{\nu=s+1}^{\infty} u_{p_\nu}.$$

Taking first s and then n sufficiently large, we obtain 2(2). This completes the proof.

Remark. It follows from Theorem 1, that if $\Omega(n)$ is a c.f. of $\sum u_n$, then all series $\sum u_{p_\nu}$ with $\omega_p(n) \leqq \Omega(n)$ are uniformly convergent: for each $\varepsilon > 0$ there is an N such that $\sum_{p_\nu > N} u_{p_\nu} < \varepsilon$.

As another application of Theorem 1 we mention the following result:

Theorem 2. *Let $\sum u_n$ be a series with real terms and let $\Omega(n)$ be a c.f. of $\sum |u_n|$. Suppose that P is a permutation of indices $1, 2, \ldots$ which transforms $\sum u_n$ into $\sum v_n$ and is such that at most $\Omega(n)$ of the numbers $1, 2, \ldots, n$ are moved by P outside of $[1, n]$. Then the series $\sum u_n$ and $\sum v_n$ are both divergent or convergent (to the same sum).*

This generalizes the theorem that an absolutely convergent series is unconditionally convergent.

For the proof it is sufficient to show that $\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \to 0$. This difference does not exceed $\sum_{\nu=1}^{r} |u_{p_\nu}| + \sum_{\nu=1}^{r} |v_{q_\nu}|$, where the p_ν are indices with $p_\nu > n$ mapped by P into $[1, n]$ and the q_ν indices $q_\nu \leq n$ mapped by P into $[n+1, \infty)$. The first sum tends to 0 by 2(2); this also applies to the second sum, since $q_1 \to \infty$ with $n \to \infty$ and since $\omega_q(m) \leq \Omega(m)$. (For each $1 \leq m \leq n$, all q_ν which satisfy $1 \leq q_\nu < m$, are mapped by P into $[m+1, \infty)$, hence their number does not exceed $\Omega(m)$.)

Remark. It is easy to prove that under the above conditions $\sum |u_n|$ and $\sum |v_n|$ have the same c.f.'s.

The following lemma, though simple, is often useful.

Lemma 1. *If $u_n \downarrow 0$, then* $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{p_\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_p(n)\,(u_n - u_{n+1})$.

For we have

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{p_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n \geq p_\nu} (u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_p(n)\,(u_n - u_{n+1}).$$

We shall sometimes make one or other of the following assumptions:

(A) $$\Delta\Omega(n) = \Omega(n+1) - \Omega(n) \leq 1 \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

(B) $u_{p_\nu} \geq K u_{p_{\nu-1}}$ for some constant $K > 0$ and some sequence $\{p_\nu\}$ with

2(3) $$\Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1}) \leq p_\nu - p_{\nu-1}$$

for all sufficiently large ν.

Assumption (A) entails no great loss of generality, since given any $\Omega(n)$ not satisfying (A) we can construct an $\Omega'(n)$ which satisfies (A) and determines the same set of counting functions $\omega_p(n)$ as does $\Omega(n)$. We may however avoid (A) by assuming (B), observing that the inequality 2(3) holds for example if $\Omega(n) = o(n)$, $p_\nu / p_{\nu-1} \geq \lambda > 1$.

Theorem 3. *Assume that $u_n \downarrow 0$. Then*

2(4) $$\sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n)\,(u_n - u_{n+1}) < +\infty$$

implies that

2(5) $$\Omega(n) \text{ is a c.f. of } \sum u_n.$$

Conversely, if (A) *or* (B) *holds,* 2(5) *implies* 2(4).

Proof. The first statement follows at once from Lemma 1. If (A) holds, and $\sum \Omega(n)\ (u_n - u_{n+1}) = +\infty$, we can construct a sequence $\{p_\nu\}$ with

$$\omega_p(n) \leq \Omega(n) \quad \text{and} \quad \sum \omega_p(n)\ (u_n - u_{n+1}) = +\infty.$$

It then follows by lemma 1 that $\Omega(n)$ is not a c.f. of $\sum u_n$. If (B) holds, and $\sum \Omega(n)\ (u_n - u_{n+1}) = +\infty$, we show first that

$$\sum u_{p_\nu} [\Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1})] = +\infty. \tag{2(6)}$$

Writing $u(p_\nu)$ for u_{p_ν}, we have

$$\begin{aligned}
(1/K) \sum_{\nu=2}^{N+1} u(p_\nu)\,[\Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1})] &\geq \sum_{\nu=2}^{N+1} u(p_{\nu-1})\,[\Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1})] \\
&= -u(p_1)\,\Omega(p_1) + \sum_{\nu=2}^{N} \Omega(p_\nu)\,[u(p_{\nu-1}) - u(p_\nu)] + u(p_N)\,\Omega(p_{N+1}) \\
&\geq O(1) + \sum_{\nu=2}^{N} \Omega(p_\nu) \sum_{n=p_{\nu-1}}^{p_\nu - 1} [u(n) - u(n+1)] \\
&\geq O(1) + \sum_{n=p_1}^{p_N - 1} \Omega(n)\,[u(n) - u(n+1)].
\end{aligned}$$

The result 2(6) now follows. Let $q_\nu = \Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1})$. The groups of integers n, $p_\nu - q_\nu < n \leq p_\nu$, are disjoint if ν is large enough, say $\nu \geq \nu_0$, since (B) implies $p_{\nu-1} \leq p_\nu - q_\nu$. If we let $u'_n = u_n$ $(p_\nu - q_\nu < n \leq p_\nu,\ \nu = \nu_0,\ \nu_0 + 1, \ldots)$, $u'_n = 0$ otherwise, the series $\sum u'_n$ may be regarded as a subseries of $\sum u_n$ with counting function $\leq \Omega(n)$, and

$$\sum_{n=0}^{\infty} u'_n \geq \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} u_{p_\nu} q_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{p_\nu} [\Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1})] = +\infty,$$

so that $\Omega(n)$ is not a c.f. for $\sum u_n$.

Theorem 4. *If u_n decreases, $\Omega(n)$ is a c.f. of $\sum u_n$, and* (A) *or* (B) *holds, then $u_n = o(1/\Omega(n))$.*

[This is a generalization of the well-known theorem, proved by L. OLIVIER in 1827, that if $u_n \downarrow 0$ and $\sum u_n$ converges, then $u_n = o(1/n)$.]

Proof. We have by Theorem 3 and the hypothesis that 2(4) holds. Hence $\Omega(m)\,(u_m - u_{m+1}) + \cdots + \Omega(n)\,(u_n - u_{n+1}) \to 0$ as $m \to \infty$, $n > m$. Hence $\Omega(m)\,(u_m - u_{n+1}) \to 0$, and by proper choice of n, $\Omega(m)\,u_m \to 0$ as required.

We next prove a theorem on the representation of c.f.'s.

Theorem 5. *Let $f(x)$ be an arbitrary positive increasing function defined for $0 < x < \infty$ and satisfying*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,x^{-2}\,dx < +\infty, \tag{2(7)}$$

and let u_n be decreasing. Then

$$\Omega(n) = f(1/u_n) \tag{2(8)}$$

is a c.f. of $\sum u_n$, and conversely, if $\Omega(n)$ is a c.f. of $\sum u_n$, if (A) *or* (B) *holds and if $u_n \leq M u_{n+1}$ for some constant M, we can find $f(x)$ satisfying* 2(7) *and* 2(8).

Proof. We have

$$f(1/u_n)\,(u_n - u_{n+1}) \leq \int_{u_{n+1}}^{u_n} f(1/u)\,du = \int_{1/u_n}^{1/u_{n+1}} f(x)\,x^{-2}\,dx.$$

Hence 2(7) implies

$$\sum f(1/u_n)\,(u_n - u_{n+1}) < +\infty.$$

It then follows from theorem 3 that $\Omega(n)$ as defined in 2(8) is a c.f. of $\sum u_n$. Conversely, if $\Omega(n)$ is given with conditions as noted, we write $f(1/u_n) = \Omega(n)$ and define $f(x)$ by linear interpolation. Then by theorem 4, $\Omega(n)u_n = f(1/u_n)\,u_n = o(1)$. We have also

$$\int_{1/u_n}^{1/u_{n+1}} f(x)\,x^{-2}\,dx \leq f(1/u_{n+1})\,(u_n - u_{n+1}),$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} f(1/u_{n-1})\,(u_n - u_{n-1}) &= \sum_{n=1}^{N} [f(1/u_{n-1}) - f(1/u_n)]\,u_n + O(1)\\ &\leq M \sum_{n=1}^{N} [f(1/u_{n+1}) - f(1/u_n)]\,u_{n+1} + O(1)\\ &= M \sum_{n=1}^{N} f(1/u_n)\,(u_n - u_{n+1}) + O(1).\end{aligned}$$

It now follows by theorem 3 that 2(7) holds. This proves theorem 5.

We now return to summability methods A given by 1(1), and recall 2(1), which is a sufficient condition for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for A. Writing $v_n = \operatorname{var}_m a_{mn}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ we have the following result.

Theorem 6. *If $v_n \downarrow 0$ and $f(x)$ satisfies the conditions of theorem 4, then*

2(9) $$\Omega(n) = f(1/v_n)$$

is an a.s.f. for the method A.

The proof is immediate. We note also that in the cases described below, where all a.s.f. of A are given by 2(1) and the inequality $v_n \leq M\,v_{n+1}$ holds, essentially all a.s.f. of A are given by 2(9). By "essentially all" we mean all satisfying (A).

3. Triangular matrices. In this section we assume $a_{mn} = 0$ $(n > m)$, and we shall find various conditions on a_{mn} under which 2(1) is necessary as well as sufficient in order that $\Omega(n)$ be an a.s.f. for A. The most useful of these will be theorem 7, since it contains a simple condition 3(4) instead of the more complicated conditions 3(5) or 3(6).

Theorem 7. *Let $A = (a_{mn})$ have the properties*

3(1) $$a_{mn} = 0 \quad (n > m), \qquad a_{nn} > 0;$$

3(2) $$a_{mn} \downarrow 0 \text{ as } m \to \infty \quad (n = 0, 1, \ldots; m \geq n)$$

3(3) $$\sum_{n=0}^{m} a_{mn} = 1 \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

3(4) $$u_{n+1} \leq M\,u_n \text{ for some constant } M \geq 1 \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

where $u_n = a_{nn}$. Then for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for A it is necessary (as well as sufficient) that $\Omega(n)$ be a c.f. for $\sum u_n$.

Proof. Let $\{q_\nu\}$ be a sequence with $q_{\nu+1} \geq q_\nu + 2$, $\omega_q(n) \leq \Omega(n)$, $\sum u_{q_\nu} = +\infty$. Define r_ν inductively as follows. If $r_1, \ldots, r_{\nu-1}$ are already defined, consider the two sums

$$A_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} (a_{q_\nu - 2,\, r_\mu} - a_{q_\nu - 1,\, r_\mu}),$$

$$B_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} (a_{q_\nu - 1,\, r_\mu} - a_{q_\nu r_\mu}).$$

Choose $r_\nu = q_\nu$ or $q_\nu - 1$ according as $A_\nu \geq B_\nu$ or $A_\nu < B_\nu$. If $x_n = 1$ $(n = r_\nu,$ $\nu = 1, 2, \ldots)$, $x_n = 0$ (otherwise), and $y_m = \sum_n a_{mn} x_n$, we shall show that var $y_m = +\infty$. But $\omega_r(n) \leq \omega_q(n) + 1$, so unless $\omega_q(n) = 0$ we have

$$\omega_r(n) \leq 2\omega_q(n) \leq 2\Omega(n);$$

thus $2\Omega(n)$ is not an a.s.f. for A and so neither is $\Omega(n)$.

To prove var $y_m = +\infty$, consider first a ν for which $A_\nu \geq B_\nu$. Then

$$|y_{q_\nu - 2} - y_{q_\nu - 1}| = A_\nu,$$

and by 3 (2), 3 (3) we have

$$B_\nu \leq \sum_{n=1}^{q_\nu - 1} (a_{q_\nu - 1,\, n} - a_{q_\nu, n}) = u_{q_\nu}.$$

Hence,

$$|y_{q_\nu - 1} - y_{q_\nu}| = u_{q_\nu} - B_\nu = u_{r_\nu} - B_\nu.$$

Similarly if $A_\nu < B_\nu$ we have

$$|y_{q_\nu - 2} - y_{q_\nu - 1}| = u_{q_\nu - 1} - A_\nu = u_{r_\nu} - A_\nu,$$

$$|y_{q_\nu - 1} - y_{q_\nu}| = B_\nu + a_{q_\nu - 1,\, q_\nu - 1} - a_{q_\nu, q_\nu - 1} \geq B_\nu.$$

Hence in either case,

$$|y_{q_\nu - 2} - y_{q_\nu - 1}| + |y_{q_\nu - 1} - y_{q_\nu}| \geq u_{r_\nu},$$

and by 3 (4)

$$\text{var } y_m \geq \sum_\nu u_{r_\nu} \geq M^{-1} \sum_\nu u_{q_\nu} = +\infty.$$

This completes the proof.

We mention also the following results:

Theorem 8. *Let $A = (a_{mn})$ have the properties:*

3 (1) $a_{mn} = 0 \quad (n > m), \qquad a_{nn} > 0;$

3 (2) $a_{mn} \downarrow 0 \quad as \quad m \to \infty,$

3 (5) $a_{m+1,\, n} - a_{m+2,\, n} \leq M (a_{mn} - a_{m+1,\, n})$

for $n = 0, 1, \ldots;$ $m \geq n$

for some constant M. Let $u_n = a_{nn}$. Then in order that $\Omega(n)$ be an a.s.f. for A, it is necessary (as well as sufficient) that $\Omega(n)$ be a c.f. for $\sum u_n$.

Theorem 9. *The above statement remains true if the condition* 3(5) *is replaced by*

3(6) $a_{mn} - a_{m+1,n}$ *is a monotone function of* n *for each* $m\,(0 \leq n \leq m)$.

We omit the proofs, which again depend on a construction of an appropriate sequence $\{x_n\}$.

4. Hausdorff Means. The method H_g is defined by the matrix $A = (a_{mn})$,

$$a_{mn} = \int_0^1 p_{mn}(t)\, dg(t),$$

where $p_{mn}(t) = \binom{m}{n} t^n (1-t)^{m-n}$ $(n \leq m)$, $p_{mn}(t) = 0$ $(n > m)$, and $g(t)$ is of bounded variation with $g(0) = g(0+) - 0$, $g(1) = 1$, $g(x) = \frac{1}{2}\{g(x+) + g(x-)\}$. The diagonal terms are given by

$$u_n = a_{nn} = \int_0^1 t^n\, dg(t),$$

and we shall find conditions on $g(t)$ under which $\Omega(n)$ is an a.s.f. for H_g if and only if $\Omega(n)$ is a c.f. for $\sum u_n$. We note also that by lemma 1 we have

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 t^{p_\nu}\, dg(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_p(n) \int_0^1 t^n (1-t)\, dg(t).$$

Hence in order that

4(1) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 t^{p_\nu}\, dg(t) < +\infty \quad \text{wherever} \quad \omega_p(n) \leq \Omega(n)$$

it is sufficient that

4(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \Omega(n) \int_0^1 t^n (1-t)\, dg(t) < +\infty.$$

Furthermore, if (A) or (B) holds, 4(2) is necessary as well as sufficient.

Theorem 10. *Let the* Hausdorff *method* H_g *be defined by a generating function* $g(t)$ *which is increasing and convex. Then* $\Omega(n)$ *is an a.s.f. for* H_g *if and only if* 4(1) *holds.*

Proof. It is sufficient to show that H_g satisfies the conditions of theorem 7. Conditions 3(1), 3(3) obviously hold, and as for 3(4) we have under our assumptions that

$$u_n = \int_0^1 t^n\, dg(t) = \int_0^1 t^n g'(t)\, dt$$

which is decreasing since $g'(t) \geq 0$. It remains to show that 3(2) holds. We have

4(3) $$a_{mn} - a_{m+1,n} = \int_0^1 \{p_{mn}(t) - p_{m+1,n}(t)\}\, g'(t)\, dt.$$

Putting

$$P(x) = \int_x^1 \{p_{mn}(t) - p_{m+1,n}(t)\}\, dt$$

we obtain from 4(3),

$$a_m - a_{m+1,n} = g'(0)\,P(0) + \int_0^1 P(t)\,g(t)\,dt,$$

from which the desired result follows if we show that $P(x)$ is positive. But

$$P(0) = \int_0^1 p_{mn}(t)\,dt - \int_0^1 p_{m+1,n}(t)\,dt = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} > 0,$$

and

$$p_{mn}(t) - p_{m+1,n}(t) = p_{mn}(t)\,\frac{(m+1)\,t-k}{m+1-k}$$

is negative for $t<n/(m+1)$ and positive for $t>n/(m+1)$. Hence $P(x)$ increases on $(0, n/(m+1))$ and decreases on $(n/(m+1), 1)$. Since $P(0)>0$, $P(1)=0$, we have $P(x)\geqq 0$. This proves the theorem.

A result previously obtained [6, theorem 8], that when $0<\alpha\leqq 1$, $\Omega(n)$ is an a.s.f. of C_α if and only if

4(4) $$\sum n^{-1-\alpha}\Omega(n) < +\infty$$

is included in the theorem just proved. For the generating function of C_α, namely $g(t)=1-(1-t)^\alpha$, satisfies the conditions of the theorem. Moreover for the diagonal terms we have $u_n = a_{nn} \sim C n^{-\alpha}$, so condition (B) holds with $p_\nu = 2^\nu$, and 4(1) is equivalent to 4(2), which in turn is equivalent to 4(4).

5. RIESZ and ABEL means: absolute inclusion theorems. Let

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$$

be a sequence tending to $+\infty$. There is no loss of generality in supposing $\lambda_0 = 0$, since for each method to be defined, if $\lambda_0 > 0$ we obtain an absolutely equivalent method by changing λ_0 to 0. The RIESZ means are defined by

$$R^\varkappa(\omega) = \sum_{\lambda_n<\omega}\left(1-\frac{\lambda_n}{\omega}\right)^\varkappa x_n = \frac{X^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa},$$

where

$$X^\varkappa(\omega) = \sum_{\lambda_n<\omega}(\omega-\lambda_n)^\varkappa x_n.$$

If $R^\varkappa(\omega)\to s$ as $\omega\to\infty$ through continuous values, the series $\sum x_n$ is said to be $R(\lambda_n, \varkappa)$-summable to s. If $\lambda(\omega)$ is a continuous monotone extension of λ_n, this is equivalent to asserting that

$$\varrho^\varkappa(\omega) = \sum_{n<\omega}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda(\omega)}\right)^\varkappa x_n \to s;$$

and if we now restrict ω to integral values, we obtain the discrete means

5(1)
$$\begin{cases} \varrho_m^\varkappa = \displaystyle\sum_{n=0}^{m}\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_{m+1}}\right)^\varkappa x_n \\ \qquad = \displaystyle\sum_{n=0}^{m}\frac{(\lambda_{m+1}-\lambda_n)^\varkappa - (\lambda_{m+1}-\lambda_{n+1})^\varkappa}{\lambda_{m+1}^\varkappa}\,s_n, \end{cases}$$

where $s_n = x_0 + \cdots + x_n$. If $\varrho_m^{\varkappa} \to s$ as $m \to \infty$, the series $\sum x_n$ or the sequence $\{s_n\}$ is said to be $R'(\lambda_n, \varkappa)$ summable to s. The diagonal elements in the transformation 5 (1) are all different from zero. Since $\lambda_0 = 0$, the sum of elements of each row is one.

The ABEL means are defined by

$$\sigma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} x_n;$$

if $\sigma(t) \to s$ as $t \downarrow 0$, the series $\sum x_n$ is said to be $A(\lambda_n)$-summable to s. It is well-known that (compare [3*a*, theorems 8 and 9])

$$5\,(2) \qquad \sum e^{-\lambda_n t} x_n = \sum (e^{-\lambda_n t} - e^{-\lambda_{n+1} t}) s_n$$

provided one of these two series converges for each $t > 0$.

The series $\sum x_n$ is absolutely $R(\lambda_n, \varkappa)$-summable [$|R(\lambda_n, \varkappa)|$-summable] if $R^{\varkappa}(\omega)$ is of bounded variation on $(0, +\infty)$, and there are similar definitions for $R'(\lambda_n, \varkappa)$ and $A(\lambda_n)$. If $\varkappa = 1$, the discrete and the continuous RIESZ means are absolutely equivalent. For if $m \leqq \omega \leqq m+1$, then

$$\varrho_m^1 - \varrho^1(\omega) = \left\{ \frac{1}{\lambda(\omega)} - \frac{1}{\lambda_{m+1}} \right\} \sum_{n=0}^{m} \lambda_n x_n.$$

Thus $\varrho(\omega)$ varies monotonely when ω changes from m to $m+1$, and is of bounded variation on $(0, +\infty)$ if and only if $\{\varrho_m\}$ is of bounded variation.

The following two theorems about the absolute inclusion of the RIESZ and ABEL means will be needed in what follows.

Theorem 11. *If $\sum x_n$ is $|R(\lambda_n, \varkappa)|$-summable to s, it is $|R(\lambda_n, \varkappa+\mu)|$-summable to s, for every $\mu > 0$.*

Proof. A classical theorem [2, theorem 16] states that $R(\lambda_n, \varkappa) \subset R(\lambda_n, \varkappa+\mu)$, and gives the relation

$$X^{\varkappa+\mu} = H \int_0^{\omega} X^{\varkappa}(u)\,(\omega - u)^{\mu-1}\,du, \qquad H = \frac{\Gamma(\mu+\varkappa+1)}{\Gamma(\varkappa+1)\,\Gamma(\mu)}.$$

Hence,

$$R^{\varkappa+\mu}(\omega) = H\,\omega^{-\varkappa-\mu} \int_0^{\omega} u^{\varkappa} R^{\varkappa}(u)\,(\omega - u)^{\mu-1}\,du$$

$$= H \int_0^1 v^{\varkappa} R^{\varkappa}(\omega v)\,(1 - v)^{\mu-1}\,dv.$$

We have only to show that $R^{\varkappa+\mu}(\omega)$ is of bounded variation if $R^{\varkappa}(\omega)$ is of bounded variation, or, what is sufficient, that $R^{\varkappa+\mu}(\omega)$ is monotone if $R^{\varkappa}(\omega)$ is monotone. This holds since $v^{\varkappa}(1-v)^{\mu-1} \geqq 0$.

Theorem 12. *If $\sum x_n$ is $|R(\lambda_n, \varkappa)|$-summable to s, and $\sum e^{-\lambda_n t} x_n$ converges for each $t > 0$, then $\sum x_n$ is $|A(\lambda_n)|$-summable to s.*

Proof. In view of [2, theorems 23–24] we have under our assumptions that

$$\sigma(t) = \sum e^{-\lambda_n t} x_n = \frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)} \int_0^\infty t^{\varkappa+1} e^{-tu} X^\varkappa(u)\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)} \int_0^\infty v^\varkappa e^{-v} R^\varkappa(v/t)\, dv,$$

and the proof is concluded as before.

We use the opportunity to correct a slight oversight in [6, theorems 1–4, pp. 238–241], where the statement that $R(\lambda_n, \varkappa)$-summability of a series $\sum a_n$ implies its $A(\lambda_n)$-summability (which follows from [2, theorems 23, 24]) was used without the necessary additional assumption that $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ converges for $x>0$. However, in theorems 1 and 3 on s.f.1, the s_n are bounded and we use the relation 5(2).

In theorem 2 on s.f.2, $s_n = O(\lambda_n/\Delta\lambda_n)$, $\Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n$, hence $a_n = O(\lambda_n/\Delta\lambda_n)$, and $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$ converges because $\lambda_n \geqq \delta n$ for some $\delta > 0$. Finally, in theorem 4, the assumption $\lambda_n/\log n \to \infty$ should be added in the case of $A(\lambda_n)$; this is sufficient to ensure the convergence of $\sum a_n e^{-\lambda_n x}$.

We shall now indicate conditions under which an arbitrary matrix $A = (a_{mn})$ has the inclusion property $|A| > |R(\lambda_n, 1)|$, (that is, every $|R(\lambda_n, 1)|$-summable sequence is $|A|$-summable to the same value). This is equivalent to $|A| > |R'(\lambda_n, 1)|$. The following theorem is obtained by expressing the A-transform of a sequence s_n by means of its $R'(\lambda_n, 1)$ means and applying a theorem of HAHN [1, theorem XI]:

Theorem 13. *In order that* $|A| > |R(\lambda_n, 1)|$ *it is necessary and sufficient that*

5(3) $$A \text{ is absolutely regular}$$

5(4) $$\operatorname{var}_m a_{mn} \leqq M \Delta\lambda_n/\lambda_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

for some constant $M \geqq 0$.

We note a corollary.

Theorem 14. *Let* $A = (a_{mn})$ *be regular, absolutely regular, triangular, and such that* a_{mn} *decreases for each fixed* n *and* $m \geqq n$ *and increases for each fixed* m *and* $n \leqq m$. *Let* $\Delta\lambda_n$ *be increasing and* $\Delta\lambda_n/\lambda_n$ *decreasing to zero. Then the relations* $|R(\lambda_n, 1)| < |A|$ *and* $R(\lambda_n, 1) < A$ *are equivalent.*

Proof. The condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\Delta\lambda_n} |a_{mn} - a_{m,n+1}| \leq M \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

is given in [7, theorem 10] as necessary and sufficient for $R(\lambda_n, 1) < A$. It is easily verified that under the conditions of the present theorem, 6(4) and 5(4) are both equivalent to

$$\lambda_n a_{nn}/\Delta\lambda_n \leq M'.$$

This completes the proof.

6. Riesz means: absolute summability functions. We treat the cases $\varkappa \geq 1$ and $0 < \varkappa < 1$ separately.

Theorem 15. *If* (i) $\varkappa \geq 1$, (ii) $u_n = \Delta\lambda_n/\lambda_n$ *decreases to zero,* (iii) $\Delta\lambda_n$ *is non decreasing, then* $\Omega(n)$ *is an a.s.f. for* $R(\lambda_n, \varkappa)$ *if and only if* $\Omega(n)$ *is a c.f. for* $\sum u_n$.

Proof. It follows easily from 2(1) that for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for $R'(\lambda_n, 1)$, hence also for $R(\lambda_n, 1)$ and $R(\lambda_n, \varkappa)$ (see theorem 11), it is sufficient for $\Omega(n)$ to be a c.f. for $\sum \Delta\lambda_n/\lambda_{n+1}$. It will be shown in theorem 19 that under the assumptions (ii), (iii), for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for $A(\lambda_n)$ it is necessary that $\Omega(n)$ be a c.f. for $\sum \Delta\lambda_n/\lambda_n$. The result then follows by theorem 12; we note that by 5(2) and the definition of a.s.f., the conditions of theorem 12 are satisfied; moreover by (ii), $\lambda_{n+1}/\lambda_n \downarrow 1$, so that the series $\sum \Delta\lambda_n/\lambda_n$ and $\sum \Delta\lambda_n/\lambda_{n+1}$ have identical c.f. In the next theorem we denote $(\Delta\lambda_n/\lambda_{n+1})^\varkappa$ by w_n.

Theorem 16. *Assume that* (i) $0 < \varkappa < 1$, (ii) $w_{n+1} \leq M w_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *for some constant* M. *Then for* $\Omega(n)$ *to be an a.s.f. for* $R(\lambda_n, \varkappa)$ *or* $R'(\lambda_n, \varkappa)$ *it is necessary and sufficient that* $\Omega(n)$ *be a c.f. for* $\sum w_n$.

Proof. We write the $R(\lambda_n, \varkappa)$ transformation in the sequence-to-sequence form,

$$\varrho^\varkappa(\omega) = \sum_{n<\omega} a_n(\omega)\, s_n,$$

where

$$a_n(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega \leq n) \\ \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda(\omega)}\right)^\varkappa & (n < \omega \leq n+1) \\ \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda(\omega)}\right)^\varkappa - \left(1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda(\omega)}\right)^\varkappa & (n+1 < \omega). \end{cases}$$

We shall show that $a_n(\omega)$ as a function of ω is decreasing for $\omega \geq n+1$; to do this it suffices to show that

$$f(x) = \left(1 - \frac{a}{x}\right)^\varkappa - \left(1 - \frac{b}{x}\right)^\varkappa$$

is a decreasing function of x for $x \geq b$, $0 \leq a < b$, or that

$$F(t) = (1 - a\,t)^\varkappa - (1 - b\,t)^\varkappa$$

is an increasing function of t for $0 < t \leq 1/b$. This holds since for $0 < \varkappa < 1$ we have

$$F'(t) = \varkappa\{b(1 - b\,t)^{\varkappa-1} - a(1 - a\,t)^{\varkappa-1}\} > 0.$$

Thus we see that $\operatorname{var} a_n(\omega) = 2w_n$, and for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for $R(\lambda_n, \varkappa)$, and hence for $R'(\lambda_n, \varkappa)$, it is sufficient that $\Omega(n)$ be a c.f. for $\sum w_n$. But the diagonal terms of the matrix of the discrete sequence-to-sequence method are also given by w_n [see 5(1)], hence by (ii) and theorem 7, it is also necessary that $\Omega(n)$ be a c.f. for $\sum w_n$. This proves the theorem.

We observe that in some cases the conditions can be put in a different form. If $w_n \downarrow 0$ and (A) or (B) holds, then for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for $R(\lambda_n, \varkappa)$

or $R'(\lambda_n, \varkappa)$ it is necessary and sufficient that

$$\sum \Omega(n)\,(w_n - w_{n+1}) < +\infty; \tag{6(1)}$$

this follows from theorem 2. If w_n is not monotonic, but is of bounded variation and

$$\operatorname{var}_{p \geq n} w_p \leq M\, w_n \tag{6(2)}$$

for some constant M, we can still get a similar result. For if 6(2) holds we can show as in lemma 1 that $\sum u_{pv} < +\infty$ if and only if $\sum \omega_p(n)\,|w_n - w_{n+1}| < +\infty$. Then if (A) holds, 6(1) may be replaced by

$$\sum \Omega(n)\,|w_n - w_{n+1}| < +\infty \tag{6(3)}$$

and in any case 6(3) is sufficient for $\Omega(n)$ to be an a.s.f. for $R(\lambda_n, \varkappa)$.

We remark here that the condition $\Delta\lambda_n/\lambda_{n+1} \to 0$ is necessary and sufficient for $R'(\lambda_n, 1)$ to possess a.s.f., and therefore sufficient for $|R'(\lambda_n, 1)|$ to be stronger than absolute convergence. If we apply MEARS' conditions for absolute regularity [8] to the inverse transformation $(R'(\lambda_n, 1))^{-1}$, we find that the exact condition for $|R(\lambda_n, 1)|$ to be stronger than absolute convergence is $\underline{\lim}\, \Delta\lambda_n/\lambda_{n+1} = 0$. We conclude this section with the following theorems.

Theorem 17. *A method $A = (a_{mn})$, for which $\sum |a_{0n}| < +\infty$, has a.s.f. if and only if $|A| \supset |R(\lambda_n, 1)|$ for some method $R(\lambda_n, 1)$ such that $\Delta\lambda_n/\lambda_{n+1} \to 0$.*

Proof. By [6, theorem 7], the method A has a.s.f. if and only if

$$v_n = \operatorname{var}_m a_{mn} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

We can find a sequence λ_n such that $\lambda_n \uparrow +\infty$, $\Delta\lambda_n/\lambda_{n+1} \to 0$, $v_n \leq M\,\Delta\lambda_n/\lambda_n$. To do this, we need only choose w_n so that $\sum w_n = +\infty$, $w_n \to 0$, $v_n < w_n$, and then define $\lambda_n = \exp(w_0 + \cdots + w_{n-1})$. This gives $\Delta\lambda_n = \lambda_n(e^{w_n} - 1) \sim \lambda_n w_n$, and the result now follows by theorem 13.

Theorem 18. *If $\Omega(n) = o(n)$, $\Omega(n)$ increases, then there is a $R(\lambda_n, 1)$ method such that $\Omega(n)$ is an a.s.f. of $R(\lambda_n, 1)$.*

Proof. Choose $\delta_n \geq 0$ with $\sum n\,\delta_n = +\infty$, $\sum \Omega(n)\,\delta_n < +\infty$, and define $c_n = \delta_n + \delta_{n+1} + \cdots$. Then $c_n \downarrow 0$, $\sum c_n = \sum n\,\delta_n = +\infty$, but $\sum (c_n - c_{n+1})\,\Omega(n) < +\infty$. Taking $\lambda_n = \exp(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$, we deduce that 6(3) with $w_n = \Delta\lambda_n/\lambda_{n+1}$ is fulfilled and hence $\Omega(n)$ is an a.s.f. of $R(\lambda_n, 1)$.

7. ABEL means: absolute summability functions. The ABEL means have been defined in § 5. We shall write

$$\sigma(t) = \sum a_n(t)\, s_n, \qquad a_n(t) = e^{-\lambda_n t} - e^{-\lambda_{n+1} t}.$$

It is easily verified that for any fixed $n \geq 1$, $a_n(t)$ has a single maximum at a certain value τ_n of t between $1/\lambda_{n+1}$ and $1/\lambda_n$. This maximum is given by

$$a_n(\tau_n) = e^{-\lambda_n \tau_n}(1 - e^{-\tau_n \Delta\lambda_n}) < e^{-\lambda_n \tau_n}\, \tau_n \Delta\lambda_n < \Delta\lambda_n/\lambda_n.$$

We denote $\Delta\lambda_n/\lambda_n$ by u_n. Then in order that

$$\Omega(n) \text{ is an a.s.f. for } A(\lambda_n), \tag{7(1)}$$

it is sufficient that

7(2) $$\Omega(n) \text{ is a c.f. for } \sum u_n.$$

If $u_n \downarrow 0$, it follows from theorem 2 that a sufficient condition for 7(2) to hold is that

7(3) $$\sum \Omega(n)\,(u_n - u_{n+1}) < +\infty.$$

Under assumptions described below, we shall show that 7(3) is a necessary condition for 7(1), and so 7(1), 7(2), 7(3) are equivalent. As the $A(\lambda_n)$ method is not defined by a triangular matrix, a more delicate analysis is required than in the preceding theorems.

Theorem 19. *If* (i) $u_n = \Delta\lambda_n/\lambda_n$ *decreases to zero,* (ii) $\Delta\lambda_n$ *is increasing, then* $\Omega(n)$ *is an a.s.f. for* $A(\lambda_n)$ *if and only if* $\Omega(n)$ *is a c.f. for* $\sum u_n$ *and if and only if* 7(3) *holds.*

[In particular, (i) and (ii) are satisfied for ABEL's method A, for which $\lambda_n = n$; then 7(3) is equivalent to $\sum n^{-2}\Omega(n) < +\infty$.]

Proof. We choose $r_1 = 1$ and the r_ν inductively so that $r_{\nu+1}$ is the first index satisfying $5\lambda_{r_\nu} < \lambda_{r_{\nu+1}}$. Then we shall have

$$5\lambda_{r_\nu} < \lambda_{r_{\nu+1}} = 5\varrho_\nu \lambda_{r_\nu}, \quad \varrho_\nu \to 1, \quad \varrho_\nu > 1.$$

Let $\varrho = \max \varrho_\nu$, and $p_\nu = r_{2\nu}$. Then by (ii),

7(4) $$u_{p_\nu} = \frac{\Delta\lambda_{p_\nu}}{\lambda_{p_\nu}} \geq \frac{\Delta\lambda_{p_{\nu-1}}}{25\varrho^2\lambda_{p_{\nu-1}}} = \frac{1}{25\varrho^2} u_{p_{\nu-1}}.$$

Let $q_\nu = \Omega(p_\nu) - \Omega(p_{\nu-1})$. We write $\lambda(r_\nu)$ for λ_{r_ν}, and

$$f_\nu(t) = \sum_{n=p_\nu}^{p_\nu+q_\nu-1} a_n(t),$$

$$t_\nu = \frac{1}{\lambda(r_\nu)},$$

so that

$$t_{2\nu} = \frac{1}{\lambda(r_{2\nu})} = \frac{1}{\lambda(p_\nu)},$$

and

$$\frac{1}{5\varrho_\nu\lambda(p_\nu)} = \frac{1}{\lambda(r_{2\nu+1})} = t_{2\nu+1} < \frac{1}{5\lambda(r_{2\nu})} = \frac{1}{5\lambda(p_\nu)}.$$

We shall assume that $\Omega(n)$ is an a.s.f. for $A(\lambda_n)$, but that 7(3) does not hold. The function $\Omega(n)$ is also a s.f.f. for $A(\lambda_n)$ and by [5, theorem 1, 2.3 (2)] we see that $f_\nu(t_{2\nu}) \to 0$ as $\nu \to \infty$.

We have also

7(5) $$\begin{cases} f_\nu(t_{2\nu}) = e^{-\lambda(p_\nu)t_{2\nu}} - e^{-\lambda(p_\nu+q_\nu)t_{2\nu}} \\ \qquad = e^{-\lambda(p_\nu)t_{2\nu}}\{1 - e^{-[\lambda(p_\nu+q_\nu)-\lambda(p_\nu)]t_{2\nu}}\} \\ \qquad = e^{-1}\{1 - e^{-[\lambda(p_\nu+q_\nu)-\lambda(p_\nu)]/\lambda(p_\nu)}\}; \end{cases}$$

hence we obtain that

7(6) $$\frac{\lambda(p_\nu+q_\nu)-\lambda(p_\nu)}{\lambda(p_\nu)} = \Delta_\nu \to 0 \quad \text{as} \quad \nu \to +\infty.$$

This implies that $\lambda(p_\nu+q_\nu)/\lambda(p_\nu)\to 1$, and since $\lambda(p_{\nu+1})>25\lambda(p_\nu)$ we obtain $p_\nu+q_\nu<p_{\nu+1}$ for all large ν. From this together with 7(4) we have, as in the proof of theorem 3 [see equation 2(6)] that

$$7(7) \qquad \sum q_\nu u_{p_\nu}=+\infty.$$

Now let $x_n=1$ for $p_\nu\leqq n<p_\nu+q_\nu$ and ν so large that the intervals $(p_\nu, p_\nu+q_\nu)$ do not overlap and $x_n=0$ otherwise, and let $y(t)=\sum a_n(t)\,x_n$. The non-vanishing x_n's have counting function $\leqq\Omega(n)$, but we shall show that $y(t)$ is not of bounded variation, and thus obtain a contradiction to our assumption that $\Omega(n)$ is an a.s.f. We have

$$y(t)=\sum_\mu f_\mu(t).$$

As already observed, each $a_n(t)$ has its maximum at a value of t between $1/\lambda_{n+1}$ and $1/\lambda_n$. Hence $f_\mu(t_{2\nu})>f_\mu(t_{2\nu+1})$ for $\mu<\nu$. Since $f_\mu(t)\geqq 0$ for each μ, t, we have

$$7(8) \qquad y(t_{2\nu})-y(t_{2\nu+1})>f_\nu(t_{2\nu})-f_\nu(t_{2\nu+1})-f_{\nu+1}(t_{2\nu+1})-\cdots.$$

We do not know whether the last expression is always positive, but we shall show that it is positive for a sufficient number of values of ν to make the sum taken over these values equal to $+\infty$, and from this it will follow that var $y(t)=+\infty$.

For all sufficiently large values of ν, the following estimations hold. First, by 7(5) and 7(6),

$$f_\nu(t_{2\nu})>\tfrac{1}{8}\Delta_\nu.$$

Next,

$$f_\nu(t_{2\nu+1})=e^{-\lambda(p_\nu)t_{2\nu+1}}\{1-e^{-[\lambda(p_\nu+q_\nu)-\lambda(p_\nu)]t_{2\nu+1}}\}<\frac{\lambda(p_\nu+q_\nu)-\lambda(p_\nu)}{5\lambda(p_\nu)}=\frac{1}{5}\Delta_\nu,$$

so that

$$f_\nu(t_{2\nu})-f_\nu(t_{2\nu+1})>\tfrac{1}{8}\Delta_\nu\geqq\tfrac{1}{8}q_\nu u(p_\nu)$$

[writing $u(p_\nu)$ for u_{p_ν}].

Now $a_n(t)$ as a function of n is decreasing if $\lambda_n>1/t$. For we may write $a_n(t)=e^{-\lambda_n t}(1-e^{-t\Delta\lambda_n})=e^{-\lambda_n t}(1-e^{-t\,\varepsilon_n\lambda_n})$, $\varepsilon_n\downarrow 0$. Consider the function $\varphi_\varepsilon(\mu)=e^{-\mu}(1-e^{-\varepsilon\mu})$. For fixed positive ε, $\varphi_\varepsilon(\mu)$ is decreasing if $\mu>1$, whence *a fortiori*, $\varphi_\varepsilon(\mu)$ is decreasing if $\mu>1$ and $\varepsilon\downarrow 0$. This proves the statement just made. We have therefore

$$\begin{aligned}
f_{\nu+k}(t_{2\nu+1}) &\leqq q_{\nu+k}\{e^{-\lambda(p_{\nu+k})t_{2\nu+1}}-e^{-\lambda(p_{\nu+k}+1)t_{2\nu+1}}\}\\
&=q_{\nu+k}\,e^{-\lambda(p_{\nu+k})t_{2\nu+1}}\{1-e^{-[\lambda(p_{\nu+k}+1)-\lambda(p_{\nu+k})]t_{2\nu+1}}\}\\
&=q_{\nu+k}\,e^{-\lambda(p_{\nu+k})/[5\,\varrho_\nu\lambda(p_\nu)]}\,\frac{\Delta\lambda(p_{\nu+k})}{5\lambda(p_\nu)}\\
&<q_{\nu+k}\,e^{-\lambda(p_{\nu+k})/[5.1\,\lambda\,p_\nu)]}\,\frac{\lambda(p_{\nu+k})}{5\lambda(p_\nu)}\,u(p_{\nu+k}).
\end{aligned}$$

We now have from 7(8) for all sufficiently large values of ν,

$$7(9) \qquad \begin{cases} y(t_{2\nu})-y(t_{2\nu+1})\geqq\tfrac{1}{8}q_\nu u(p_\nu)-5.1\,e^{-4.9}q_{\nu+1}u(p_{\nu+1})\\ \qquad\qquad -(5.1)^3e^{-(4.9)^2}q_{\nu+2}u(p_{\nu+2})-\cdots. \end{cases}$$

We now introduce the following lemma:

Lemma 2. *Let $\beta_1, \beta_2, \ldots$ be a sequence of positive numbers, tending to zero, with $\sum \beta_\nu = +\infty$; let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ be a sequence of positive numbers such that*

$$\alpha_p \alpha_q \leq \alpha_1^{p+q} \quad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

and

$$\alpha_1 < \tfrac{1}{2}.$$

Let $c_\nu = \beta_\nu - \alpha_1 \beta_{\nu+1} - \alpha_2 \beta_{\nu+2} - \cdots$, and let $c_\nu^+ = max(c_\nu, 0)$. Then $\sum_\nu c_\nu^+ = +\infty$.

Proof. We find first an expression for the β_ν in terms of the c_ν. We write

$$\beta_\nu = c_\nu + \alpha_1 \beta_{\nu+1} + \alpha_2 \beta_{\nu+2} + \cdots,$$

and substitute for $\beta_{\nu+1}$ the expression obtained by changing ν to $\nu+1$ in the same equation, viz.,

$$\beta_{\nu+1} = c_{\nu+1} + \alpha_1 \beta_{\nu+2} + \alpha_2 \beta_{\nu+3} + \cdots;$$

After that, we replace $\beta_{\nu+2}$ by the corresponding expression, and so on. After the p-th step, we shall have

7(10) $$\beta_\nu = c_\nu + \delta_1 c_{\nu+1} + \cdots + \delta_p c_{\nu+p} + \sum_{q>p} \gamma_{pq} \beta_{\nu+q}.$$

We have clearly the recursive relation

$$\gamma_{pq} = \gamma_{p-1,q} + \gamma_{p-1,p} \alpha_{q-p},$$

whence it follows by induction that

$$0 \leq \gamma_{pq} \leq 2^p \alpha_1^q.$$

Therefore if $\varepsilon_n = \max_{\nu \geq n} \beta_\nu$, we have

$$0 \leq \sum_{q>p} \gamma_{pq} \beta_{\nu+q} \leq \varepsilon_{\nu+p} \sum_{q>p} \alpha_1^{q-p} \to 0,$$

as $p \to \infty$. Passing in 7(10) to the limit, we obtain

7(11) $$\beta_\nu = c_\nu + \delta_1 c_{\nu+1} + \delta_2 c_{\nu+2} + \cdots + \delta_p c_{\nu+p} + \cdots,$$

where $\delta_p = \gamma_{p-1,p}$, hence

$$0 \leq \delta_p \leq (2\alpha_1)^p = \zeta^p \quad (0 < \zeta < 1).$$

We have from 7(11) that

$$\sum_{\nu=1}^{N} \beta_\nu = c_1 + c_2(1+\delta_1) + c_3(1+\delta_1+\delta_2) + \cdots + c_N(1+\delta_1+\cdots+\delta_{N-1}) + \\ + \cdots + c_{N+k}(\delta_k + \delta_{k+1} + \cdots + \delta_{N+k-1}) + \cdots.$$

Now suppose if possible that $\sum_N c_\nu^+ = M < +\infty$. Since the δ's are all positive, and $\sum \delta_k = \Delta < +\infty$, we have $\sum_{\nu=1}^{N} \beta_\nu \leq M\Delta$, so that $\sum \beta_\nu$ converges, contrary to hypothesis. This proves the lemma.

It is now clear that c_ν may be taken as the right hand side of 7(9) with $\beta_\nu = \frac{1}{8}(q_\nu u_{p_\nu})$, $\alpha_1 = 8(5.1)\, e^{-4.9}$, $\alpha_2 = 8(5.1)^3\, e^{-(4.9)^3}$, and so forth.

Then $\sum c_\nu^+ = +\infty$ implies that var $y(t) = +\infty$, and with this the theorem is proved.

References.

[1] Hahn, H.: Über Folgen linearer Operationen. Mh. Math. Phys. **32**, 3—88 (1922). — [2] Hardy, G. H., and M. Riesz: The General Theory of Dirichlet Series. Cambridge 1915. — [3] Knopp, K., and G. G. Lorentz: Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. d. Math. **2**, 10—16 (1949). — [3a] Lorentz, G. G.: Über Limitierungsverfahren, die von einem Stieltjes-Integral abhängen. Acta Math. **79**, 255—272 (1947). — [4] Lorentz, G. G.: A contribution to the theory of divergent sequences. Acta Math. **80**, 167—190 (1948). — [5] Lorentz, G. G.: Direct theorems on methods of summability. Canad. J. Math. **1**, 305—319 (1949). — [6] Lorentz, G. G.: Direct theorems on methods of summability. II. Canad. J. Math. **3**, 236—256 (1951). — [7] Lorentz, G. G.: Riesz methods of summation and orthogonal series. Trans. Roy. Soc. Canada, III. Ser. **45**, 19—32 (1951). — [8] Mears, F. M.: Absolute regularity and the Nörlund mean. Ann. of Math. **38**, 594—601 (1937).

Wayne University, Detroit, and Carleton College, Ottawa.

(Eingegangen am 22. Juni 1953.)

Volkmann, B.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 247—254 (1953)

Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. II.*)

Von
Bodo Volkmann.

1. Für eine Zahl ϱ mit $0<\varrho\leqq 1$ und der g-adischen Entwicklung

$$\varrho=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e_i}{g^i} \qquad (e_i \text{ ganz};\ 0\leqq e_i<g;\ \text{unendlich viele } e_i\neq 0;\ g\geqq 2) \tag{1}$$

sei $A_j(\varrho,n)=A_j(n)$ die Anzahl der Ziffern e_i mit $i\leqq n$, die den Wert j haben. Dann gibt es zu vorgegebenen Zahlen $\zeta_0,\zeta_1,\ldots,\zeta_{g-1}$ mit $0\leqq\zeta_j\leqq 1$ und $\sum_{j=0}^{g-1}\zeta_j=1$ immer eine Menge $G(\zeta_0,\ldots,\zeta_{g-1})$ von Zahlen ϱ, bei denen die relativen Häufigkeiten $\frac{A_j(\varrho,n)}{n}$ der g vorhandenen Ziffern den Bedingungen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_j(\varrho,n)}{n}=\zeta_j \qquad (j=0,\ldots,g-1) \tag{2}$$

genügen. Es ist seit langem[1]) bekannt, daß das Lebesguesche Maß von $G(\zeta_0,\ldots,\zeta_{g-1})$ Eins oder Null ist, je nachdem ob sämtliche ζ_j den Wert $1/g$ haben, also alle g Ziffern asymptotisch gleich oft auftreten, oder nicht. Dieses Ergebnis wurde 1948 von H. G. Eggleston[2]) verschärft durch den Nachweis, daß die gebrochene Dimension

$$\dim G(\zeta_0,\ldots,\zeta_{g-1})=\frac{\sum_{j=0}^{g-1}\zeta_j\log\zeta_j}{\log\frac{1}{g}} \tag{3}$$

ist.

In Nr. **2** und **3** der vorliegenden Arbeit wird (3) folgendermaßen verallgemeinert: Die Menge $\mathfrak{G}=\{0,1,\ldots,g-1\}$ werde so in $m\geqq 1$ Mengen $\mathfrak{G}_1,\ldots,\mathfrak{G}_m$ zerlegt, daß jede Ziffer $j\in\mathfrak{G}$ genau einem $\mathfrak{G}_\mu$ angehört. Man läßt dann die Unterscheidung zwischen Ziffern aus der gleichen Menge $\mathfrak{G}_\mu$ fortfallen und betrachtet bei festem ϱ die Anzahlen $A_\mu(\varrho,n)$ der Ziffern e_i mit $e_i\leqq n$ und

*) Teil I dieser Arbeit, im folgenden mit I zitiert, wurde in Math. Z. **58**, 284—287 (1953) veröffentlicht. Die dort verwendete Terminologie und Schreibweise wird hier beibehalten. In Gl. (2) muß es „$e_i\geqq f_i$" statt „$e_i\leqq f_i$" heißen.

[1]) Siehe Borel, E.: Les probabilités denombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Circ. Mat. Palermo **27**, 247—271 (1909), wo der Beweis für den Fall $g=2$ ausgeführt ist.

[2]) Eggleston, H. G.: The fractional dimension of a set defined by decimal properties. Quart. J. Math. **20**, 31—36 (1949).

$i \in \mathfrak{G}_\mu$. Bezeichnet man bei gegebenen Zahlen ζ_μ mit $0 \leqq \zeta_\mu \leqq 1$ und $\sum_{\mu=1}^{m} \zeta_\mu = 1$ die Mengen der Zahlen ϱ, für die

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_\mu(\varrho, n)}{n} = \zeta_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

gilt, mit $G = G(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m; \zeta_1, \ldots, \zeta_m)$, so gilt der

Satz 1. *Die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{G}_\mu$ sei w_μ $(\mu = 1, \ldots, m)$. Dann ist die gebrochene Dimension von G*

$$\dim G(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m; \zeta_1, \ldots, \zeta_m) = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} \zeta_\mu \log \frac{\zeta_\mu}{w_\mu}}{\log \frac{1}{g}} = \delta.$$

Der nachfolgende Beweis stellt eine Kombination von Methoden dar, wie sie einerseits EGGLESTON zum Beweis von (3) und andererseits der Verfasser[3]) bei Untersuchungen im Fall $g = 2$ angewendet haben. Mit der gleichen Beweisanordnung wird in Nr. **4** für den Fall, daß in (3) alle ζ_μ bis auf eines verschwinden und folglich $\dim G = 0$ wird, eine gewisse Erweiterung von (3) bewiesen, die wiederum in Nr. **5** für den Fall $g = 2$ noch etwas verschärft wird.

2. Zum *Beweis von Satz 1* zeigen wir zunächst

$$\dim G \leqq \delta. \tag{5}$$

Die Menge der ϱ, die den Bedingungen

$$\zeta_\mu - \varepsilon \leqq \frac{A_\mu(\varrho, n)}{n} \leqq \zeta_\mu + \varepsilon \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \varepsilon > 0) \tag{6}$$

genügen, werde mit $T_n(\varepsilon)$ bezeichnet. Dann läßt sich $T_n(\varepsilon)$ in eine gewisse Anzahl $h_n(\varepsilon)$ von Intervallen der Form $\left(\frac{k}{g^n}, \frac{k+1}{g^n}\right)$ zerlegen, und zwar ist

$$h_n(\varepsilon) = \sum \frac{n!}{t_1! \ldots t_m!} w_1^{t_1} \ldots w_m^{t_m}, \tag{7}$$

wobei die Summation über alle m-Tupel $t_1, \ldots, t_m$ mit

$$\zeta_\mu - \varepsilon \leqq \frac{t_\mu}{n} \leqq \zeta_\mu + \varepsilon \,(\mu = 1, \ldots, m) \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=1}^{m} t_\mu = n$$

zu erstrecken ist. Denn es gibt $\frac{n!}{t_1! \ldots t_m!}$ Möglichkeiten, t_1 bzw. $t_2, \ldots, t_m$ Ziffern der m Mengen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_m$ auf n Stellen zu verteilen, und bei einer solchen Verteilung kann an jeder der t_μ Stellen, die für Ziffern aus $\mathfrak{G}_\mu$ vorgesehen werden, jede der w_μ vorhandenen Ziffern stehen.

Da die Grenzwerte ζ_μ die Summe Eins haben und folglich nicht alle verschwinden, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\zeta_m > 0$ angenommen werden. Sind dann Q_1 und Q_2 zwei Summanden von (7), etwa

$$Q_1 = \frac{n!}{t_1'! \ldots t_m'!} w_1^{t_1'} \ldots w_m^{t_m'} \quad \text{und} \quad Q_2 = \frac{n!}{t_1''! \ldots t_m''!} w_1^{t_1''} \ldots w_m^{t_m''},$$

[3]) VOLKMANN, B.: Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen. J. reine angew. Math. **190**, 199—230, § 8 (1952).

für die es einen Index $\sigma < m$ gibt, so daß $t'_\sigma = t''_\sigma - 1$, $t'_m = t''_m + 1$ und $t'_\mu = t''_\mu$ für alle übrigen μ ist, so ist

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{t''_\sigma w_m}{t'_m w_\sigma} \leqq \frac{(\zeta_\sigma + \varepsilon) w_m}{(\zeta_m - \varepsilon) w_\sigma}. \tag{8}$$

Wegen $\zeta_m > 0$ wird somit bei genügend kleinem ε sicher $\frac{Q_1}{Q_2} < K_1$, wenn

$$K_1 > \max_{\sigma=1,\ldots,m-1} \frac{\zeta_\sigma w_m}{\zeta_m w_\sigma}$$

ist[4]). Setzt man

$$Q_0 = \frac{n!}{t_1! \ldots t_m!} w_1^{t_1} \ldots w_m^{t_m},$$

wobei $t_\mu = [(\zeta_\mu + \varepsilon) n]$ für $\mu = 1, \ldots, m-1$ und $t_m = n - \sum_{\mu=1}^{m-1} t_\mu$

ist, so kann jeder Summand von (7) durch sukzessive ausgeführte Operationen der Form $Q_1 \to Q_2$ in Q_0 übergeführt werden. Da die Anzahl der dabei erforderlichen Schritte höchstens gleich $2\varepsilon n(m-1)$ ist, wird für jeden Summanden Q somit $Q < Q_0 K_1^{2\varepsilon n(m-1)}$. Für Q_0 gilt, wie man durch Anwendung der Stirlingschen Formel bestätigt, die asymptotische Gleichung

$$Q_0 \cong K_2 g^{\frac{n \sum_{\mu=1}^{m} \zeta^*_\mu (\log w_\mu - \log \zeta^*_\mu) + K_3 \log n}{\log g}},$$

wobei $\zeta^*_\mu = \zeta_\mu + \varepsilon (\mu = 1, \ldots, m-1)$ und $\zeta^*_m = 1 - \sum_{\mu=1}^{m-1} \zeta^*_\mu$ ist. Für jedes $\eta > 0$ wird also bei hinreichend kleinem ε und hinreichend großem n offenbar $Q_0 < g^{n(\delta+\eta)}$, und aus

$$h_n(\varepsilon) < Q_0 K_1^{2\varepsilon n(m-1)} (2\varepsilon n)^{m-1},$$

folgt daher für jedes $\alpha > \delta$ bei hinreichend kleinen η und ε

$$\frac{h_n(\varepsilon)}{g^{n\alpha}} < \frac{g^{n(\delta+\eta)} K_1^{2\varepsilon n(m-1)} (2\varepsilon n)^{m-1}}{g^{n\alpha}} \to 0$$

für $n \to \infty$. Da die Menge $\bigvee_{l=n}^{\infty} T_l(\varepsilon)$ in der betrachteten Zerlegung eine g^{-n}-Überdeckung von $G(\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_m; \zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ darstellt, verschwindet folglich das mit $\mu^{(\alpha)}(t) = t^\alpha$ gebildete Maß $\mu^\alpha\{G\}$, woraus (5) folgt.

3. Zum Abschluß des Beweises ist nun noch

$$\dim G \geqq \delta \tag{9}$$

zu zeigen. Sei $M_n(s)$ die Menge der ϱ mit

$$A_\mu(\varrho, i\,s) = [\zeta_\mu i\,s] \quad (s = 1, 2, \ldots; n = 1, 2, \ldots; i = 1, \ldots, n; \mu = 1, \ldots, m-1)$$

und

$$A_m(\varrho, i\,s) = i\,s - \sum_{\mu=1}^{m-1} A_\mu(\varrho, i\,s).$$

Dann ist $M_n(s) \geqq M_{n+1}(s)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, und für den Durchschnitt

[4]) $K_1, \ldots, K_3$ sind positive Konstanten.

$M(s) = \bigwedge_{n=1}^{\infty} M_n(s)$ gilt $M(s) \subseteqq G$. Offenbar läßt sich $M_n(s)$ als Vereinigung einer Anzahl $f_n(s)$ von Intervallen $\mathfrak{m}_n(s)$ der Länge $\lambda_n = g^{-ns}$ auffassen, von denen jedes die gleiche Anzahl $\frac{f_{n+1}(s)}{f_n(s)}$ von Intervallen $\mathfrak{m}_{n+1}$ enthält. Setzt man $[\zeta_\mu(n+1)s] - [\zeta_\mu ns] = d_\mu(n)$ $(\mu = 1, \ldots, m-1)$ und $s - \sum_{\mu=1}^{m-1} d_\mu(n) = d_m(n)$, so wird

$$\frac{f_{n+1}(s)}{f(s)} = \frac{s!}{d_1(n)! \ldots d_m(n)!}\, w_1^{d_1(n)} \ldots w_m^{d_m(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ f_0(s) = 1).$$

Somit wird für große s

$$f_n(s) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{f_{i+1}(s)}{f_i(s)} = \left(\frac{s!\, w_1^{\zeta_1 s} \ldots w_m^{\zeta_m s}}{[\zeta_1 s]! \ldots [\zeta_m s]!}\right)^{n(1+o(1))} = g^{ns\,\delta(1+o(1))},$$

letzteres aufgrund der STIRLINGschen Formel. Nach dem in I zitierten Satz von EGGLESTON, dessen Voraussetzung a) nach den obigen Überlegungen zutrifft und dessen Voraussetzung b) für $\alpha < \delta$ wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot \frac{g^{ns\alpha}}{f_n(s)} < K_4 \sum_{n=1}^{\infty} g^{ns(\alpha-\delta-o(1))} < \infty$$

ebenfalls erfüllt ist, folgt also (9), womit Satz 1 bewiesen ist.

Setzt man $m = g$, so daß jede Menge $\mathfrak{G}_\mu$ aus einer einzigen Ziffer besteht, so erhält man aus Satz 1 wieder (3). Ferner ergibt sich die

Folgerung. Werden nur über $w < g$ Ziffern, etwa über die Ziffern $0, 1, \ldots, w-1$, Voraussetzungen der Form (2) gemacht, so ergibt sich statt $G(\zeta_0, \ldots, \zeta_{g-1})$ die Vereinigungsmenge

$$H(\zeta_0, \ldots, \zeta_{w-1}) = \bigvee_{\substack{0 \le \zeta_\mu \le 1 \\ \mu = w, w+1, \ldots, g-1}} G(\zeta_0, \ldots, \zeta_{g-1}),$$

und es ist

$$\dim H(\zeta_0, \ldots, \zeta_{w-1}) = \frac{\sum_{\mu=0}^{w-1} \zeta_\mu \log \zeta_\mu + \zeta' \log \frac{\zeta'}{g-w}}{\log \frac{1}{g}},$$

wobei $\zeta' = 1 - \sum_{\mu=0}^{w-1} \zeta_\mu$ gesetzt ist.

4. Wenn $g-1$ von den g vorgegebenen Grenzwerten ζ_i in (3) verschwinden, der übrigbleibende, etwa ζ_0, also den Wert Eins hat, wird $\dim G(\zeta_0, \ldots, \zeta_{g-1}) = 0$. Es liegt daher nahe, in diesem Falle Grenzwerte der Form $\lim_{n\to\infty} \frac{A_j(\varrho, n)}{n^{\beta_j}}$ heranzuziehen und für die damit definierten Untermengen von $G(1, 0, \ldots, 0)$ die HAUSDORFFschen Dimensionen in bezug auf geeignet gewählte Funktionenklassen zu bestimmen. Es seien $\beta_1, \ldots, \beta_{g-1}$ Zahlen mit $0 < \beta_j < 1$, ferner (in neuer Bezeichnung) $\zeta_1, \ldots, \zeta_{g-1}$ positive Zahlen, und die Menge der Zahlen ϱ, für die

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_j(\varrho, n)}{n^{\beta_j}} = \zeta_j \qquad (j = 1, \ldots, g-1) \tag{10}$$

gilt, werde mit $E = E(\beta_1, \ldots, \beta_{g-1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_{g-1})$ bezeichnet. Setzt man ferner für geeignete Intervalle $0 \leq t \leq t_0(\alpha)$

$$\varkappa^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{\log g}{-\log t}\right)^{\left(\frac{-\log t}{\log g}\right)^{\alpha}},$$

so sind die $\varkappa^{(\alpha)}(t)$ M-Funktionen, für die Gl. (4) von I erfüllt ist. Es gilt der

Satz 2. *In bezug auf die Klasse K der Funktionen $\varkappa^{(\alpha)}(t)$ ist*

$$\dim_K E = \beta,$$

wenn $\beta = \max_{j=1,\ldots,g-1} \beta_j$ gesetzt wird.

Zum Beweis benötigt man den folgenden

Hilfssatz 1. *Für die Funktion*

$$P(n) = \frac{n!}{(\zeta_{0n}\, n)!\,[\zeta_1 n^{\beta_1}]! \ldots [\zeta_{g-1} n^{\beta_{g-1}}]!}, \qquad \zeta_{0n}\, n = n - \sum_{j=1}^{g-1} \zeta_j n^{\beta_j}$$

gilt bei gegebenem $\varepsilon > 0$ für hinreichend große n

$$n^{n^{\beta-\varepsilon}} < P(n) < n^{n^{\beta+\varepsilon}}.$$

Beweis. Nach der Stirlingschen Formel ist

$$[\zeta_j n^{\beta_j}]! \cong \sqrt{2\pi\zeta_j}\left(\frac{\zeta_j n^{\beta_j}}{e}\right)^{\zeta_j n^{\beta_j}} n^{\frac{\beta_j}{2}}$$

und daher

$$P(n) \cong K_5 \left(\prod_{j=1}^{g-1} \zeta^{\zeta_j n^{\beta_j}}\right)^{-1} n^{-\left(\sum_{j=1}^{g-1}\beta_j \zeta_j n^{\beta_j} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g-1}\beta_j\right)(1+o(1))} \varphi(n). \tag{11}$$

Dabei ist, wenn abkürzend $\sum_{j=1}^{g-1} \zeta_j n^{\beta_j} = S(n)$ gesetzt wird,

$$\varphi(n) = \frac{n^n}{(n - S(n))^{n-S(n)}} = \left(\frac{n}{n - S(n)}\right)^{n-S(n)} n^{S(n)} = \left(\frac{\frac{n}{S(n)}}{\frac{n}{S(n)} - 1}\right)^{\left(\frac{n}{S(n)}-1\right)S(n)} n^{S(n)}.$$

Da $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} = e$ ist, wird also

$$\varphi(n) \cong (e\, n)^{S(n)}.$$

Setzt man dies in (11) ein und berücksichtigt man, daß wegen $\beta_j < 1$ für hinreichend große n

$$n^{\beta-\varepsilon} < S(n) - \sum_{j=1}^{g-1} \beta_j \zeta_j n^{\beta_j} < n^{\beta+\varepsilon}$$

ist, so erhält man die Behauptung.

Der *Beweis von Satz 2* läßt sich nun nach der gleichen Methode wie der von Satz 1 erbringen. Um

$$\dim_K E \leq \beta \tag{5'}$$

zu zeigen, betrachtet man die Mengen $T_n'(\varepsilon)$ der ϱ mit

$$\zeta_j - \varepsilon \leq \frac{A_j(\varrho, n)}{n^{\beta_j}} \leq \zeta_j + \varepsilon \qquad (j = 1, \ldots, g-1). \tag{6'}$$

$T'_n(\varepsilon)$ besteht aus

(7′) $$h'_n(\varepsilon) = \sum \frac{n!}{t_0! \dots t_{g-1}!}$$

Intervallen der Länge g^{-n}, wobei die Summation über alle g-Tupel $t_0, \dots, t_{g-1}$ mit

$$(\zeta_j - \varepsilon)\, n^{\beta_j} \leq t_j \leq (\zeta_j + \varepsilon)\, n^{\beta_j} \qquad (j = 1, \dots, g-1) \quad \text{und} \quad t_0 = n - \sum_{j=1}^{g-1} t_j$$

zu erstrecken ist. Sind

$$Q_1 = \frac{n!}{t'_0! \dots t'_{g-1}!} \quad \text{und} \quad Q_2 = \frac{n!}{t''_0! \dots t''_{g-1}!}$$

zwei Summanden von (7′), für die es ein Indexpaar σ, τ gibt, so daß $t'_\sigma = t''_\sigma - 1$, $t'_\tau = t''_\tau + 1$ und $t'_j = t''_j$ für alle übrigen j ist, so wird, wenn man $\beta_0 = \zeta_0 = 1$ setzt, für hinreichend kleines ε und für hinreichend großes n

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{t'_\sigma}{t''_\tau} \leq \frac{(\zeta_\sigma - \varepsilon)\, n^{\beta_\sigma}}{(\zeta_\tau + \varepsilon)\, n^{\beta_\tau}}.$$

Setzt man also $\xi = \max_{\sigma, \tau = 0, \dots, g-1} |\beta_\tau - \beta_\sigma|$, so wird $\frac{Q_1}{Q_2} < K_5\, n^{\xi}$, wenn $K_5 > \max_{\sigma, \tau = 0, \dots, g-1} \frac{\zeta_\sigma}{\zeta_\tau}$ ist. Setzt man nun

$$Q_0 = \frac{n!}{t_0! \dots t_{g-1}!}, \quad \text{wo} \quad t_j = [\zeta_j\, n^{\beta_j}] \quad (j = 1, \dots, g-1) \quad \text{und} \quad t_0 = n - \sum_{j=1}^{g-1} t_j$$

ist, so wird für jeden Summanden Q von (7′)

$$Q < Q_0 (K_5\, n^{\xi})^{2\varepsilon (g-1)\, n^{\beta}}.$$

Da nach Hilfssatz 1 für genügend großes n

$$Q_0 < n^{n^{\beta} + \varepsilon}$$

und die Anzahl der Summanden von (7′) höchstens gleich $(2\varepsilon\, n^{\beta})^{g-1}$ ist, wird somit

$$h'_n(\varepsilon) < Q_0 (K_5\, n^{\xi})^{2\varepsilon (g-1)\, n^{\beta}} \cdot (2\varepsilon\, n^{\beta})^{g-1} = n^{n^{\beta} + o(1)},$$

und folglich gilt für $\alpha > \beta$

$$h'_n(\varepsilon)\, \varkappa^{(\alpha)}(g^{-n}) = \frac{h_n(\varepsilon)}{n^{n^{\alpha}}} = \frac{n^{n^{\beta} + o(1)}}{n^{n^{\alpha}}} \to 0,$$

woraus (5′) folgt.

Zum Nachweis von

(9′) $$\dim_K E \geq \beta$$

führt man entsprechend wie in Nr. 3 die Mengen $M'_n(s)$ der Zahlen ϱ mit

$$A_j(\varrho, i\, s) = [\zeta_j (i\, s)^{\beta_j}] \qquad (i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, g-1)$$

ein. In naheliegender Bezeichnungsweise erhält man, wenn abkürzend

$$[(n+1)^{\beta_j} s^{\beta_j} \zeta_j] - [n^{\beta_j} s^{\beta_j} \zeta_j] = p_j(n, s) \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

gesetzt wird,

$$\frac{f'_{n+1}(s)}{f'_n(s)} = \frac{s!}{\left(s - \sum_{j=1}^{g-1} p_j(n,s)\right)!\, p_1(n,s)! \dots p_{g-1}(n,s)!}, \qquad (f'_0(s) = 1).$$

Für hinreichend große n nimmt jeder der Ausdrücke $p_j(n,s)$ nur die Werte Null und Eins an, so daß dann immer

$$\frac{f'_{n+1}(s)}{f'_n(s)} = \frac{s!}{(s-v_n)!} \qquad (0 \leqq v_n \leqq g-1)$$

wird, wenn v_n die Anzahl der Indizes ist, für die $p_j(n,s) = 1$ ist. Bei festem n_0 ist die Anzahl der $n \leqq n_0$, für die $v_n > 0$ ausfällt, sicher mindestens gleich $K_6 n^\beta s^\beta$. Daher wird

$$f'_n(s) = \prod_{i=1}^{n} \frac{f'_i(s)}{f'_{i-1}(s)} \geqq K_7 \left(\frac{s!}{(s-1)!}\right)^{K_6 n^\beta s^\beta} = K_7\, s^{K_6 n^\beta s^\beta}.$$

Man erkennt nun wie in Nr. 3, daß für $\alpha < \beta$ der dort verwendete Satz von Eggleston anwendbar ist; denn es wird

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{x^{(\alpha)}(g^{-n}s)\, f'_n(s)} \leqq \frac{2^s}{K_7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\,s)^{(n\,s)^\alpha}}{s^{(n\,s)^\beta K_6}} < \infty,$$

so daß (9′) folgt und damit Satz 2 bewiesen ist.

5. Für den Fall $g = 2$ gehen, wenn man wie in I die Zahl $\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i}$ als Dualwert $\Gamma(\mathfrak{A})$ der Menge $\mathfrak{A}$ von natürlichen Zahlen auffaßt, $A_1(\varrho, n)$ und $A_0(\varrho, n)$ in die Anzahlfunktionen $A(n)$ und $\overline{A}(n)$ von $\mathfrak{A}$ bzw. der Komplementärmenge $\overline{\mathfrak{A}}$ über. Wir können in diesem Falle den Satz 2 etwas verschärfen und bezeichnen dazu bei $0 < \beta < 1$, $0 < \zeta$

die Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$, für die $\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n^\beta} = \zeta$ ist,

die Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$, für die $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n^\beta} = \zeta$ ist,

die Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$, für die $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n^\beta} = \zeta$ ist und

die Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$, für die ζ Häufungspunkt der Folge $\frac{A(n)}{n^\beta}$ ist,

respektive mit $G_1(\beta,\zeta)$, $G_2(\beta,\zeta)$, $G_3(\beta,\zeta)$ und $G_4(\beta,\zeta)$. Dann gilt, wenn allgemein für eine Klasse M von Mengen natürlicher Zahlen die Menge der zugehörigen Dualwerte mit ${}_\Gamma M$ bezeichnet und zur Abkürzung $\bigvee_{0 \leqq \zeta' \leqq \zeta} G_4(\beta,\zeta') = V(\beta,\zeta)$ gesetzt wird, der

Satz 3 [5]. *Sei $Q(\beta,\zeta)$ eine Klasse von Mengen $\mathfrak{A}$ mit*

$$G_1(\beta,\zeta) \subseteq Q(\beta,\zeta) \subseteq V(\beta,\zeta). \tag{12}$$

[5]) Ein diesem Satz analoger, der die gebrochene Dimension von ${}_\Gamma Q(\beta,\zeta)$ für den Fall $\beta = 1$ angibt, wurde vom Verfasser in einer früheren Arbeit bewiesen: l.c.[3]), Satz 52.

Dann ist in bezug auf die von den Funktionen

$$\varkappa^{(\alpha)}(t) = \left(\frac{\log 2}{-\log t}\right)^{\left(\frac{-\log t}{\log 2}\right)^{\alpha}}$$

gebildete Funktionenklasse K

$$\dim_K {}_rQ(\beta,\zeta) = \beta.$$

Beweis. Man hat

(13) $$\dim_K {}_rG_1(\beta,\zeta) \geq \beta \quad \text{und} \quad (14) \quad \dim {}_rV(\beta,\zeta) \leq \beta$$

zu zeigen. (13) ist in (9') enthalten, da ${}_rG_1(\beta,\zeta) = E(\beta;\zeta)$ ist. Zum Beweis von (14) braucht man den

Hilfssatz 2. *Sei $\chi(n)$ eine positive zahlentheoretische Funktion mit $\chi(n) = o(n)$. Dann ist*

$$\binom{n}{\chi(n)} = (1 - o(1)) \sum_{i=1}^{\chi(n)} \binom{n}{i}.$$

Beweis. Im Summationsbereich ist, wenn $\frac{\chi(n)+1}{n-\chi(n)} = \xi_n$ gesetzt wird,

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{i+1} \frac{i+1}{n-i} < \binom{n}{i+1} \xi_n < \binom{n}{i+2} \xi_n^2 < \cdots < \binom{n}{\chi(n)} \xi_n^{\chi(n)-i}.$$

Folglich wird

$$\sum_{i=0}^{\chi(n)} \binom{n}{i} < \binom{n}{\chi(n)} \sum_{i=0}^{\chi(n)} \xi_n^{\chi(n)-i} < \binom{n}{\chi(n)} \sum_{i-0}^{\infty} \xi_n^i = \binom{n}{\chi(n)} \frac{1}{1-\xi_n},$$

und hieraus folgt die Behauptung, da wegen $\chi(n) = o(n)$ offenbar $\xi_n = o(1)$ ist.

Ist $\vartheta > \zeta$, so bezeichnen wir die Klasse der Mengen $\mathfrak{A}$, für die $A(n) < [\vartheta\, n^{\beta}]$ gilt, mit $J_n(\vartheta)$. Dann läßt sich ${}_rJ_n(\vartheta)$ in der üblichen Weise in eine Anzahl

$$b_n(\vartheta) = \sum_{i=0}^{[\vartheta\, n^{\beta}]} \binom{n}{i}$$

von Intervallen der Länge 2^{-n} zerlegen. Die Mengen $\overset{\infty}{\underset{n=m}{\vee}} {}_rJ_n(\vartheta)$ sind 2^{-m}-Überdeckungen von ${}_rV(\beta,\zeta)$; denn definitionsgemäß gehört jedes $\mathfrak{A} \in V(\beta,\zeta)$ unendlich vielen $J_n(\vartheta)$ an. Somit wird, da nach Hilfssatz 2

$$b_n(\vartheta) \cong \binom{n}{[\vartheta\, n^{\beta}]}$$

ist, für $\alpha > \beta$

$$\varkappa^{(\chi)}_{2^{-m}}\{{}_rV(\beta,\zeta)\} \leq \sum_{n=m}^{\infty} b_n(\vartheta)\, \varkappa^{(\alpha)}(2^{-m}) < K_8 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\binom{n}{[\vartheta\, n^{\beta}]}}{n^{n^{\alpha}}},$$

und diese Reihe ist nach Hilfssatz 1 konvergent, so daß $\varkappa^{(\alpha)}\{{}_rV(\beta,\zeta)\} = 0$ und damit (14) folgt.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 28. Mai 1953.)

KRUBECK, E.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 255—257 (1953)

Über Zerfällungen in paarweis ungleiche Polynomwerte.

Von
ELEONORE KRUBECK.

Wie Herr SPRAGUE gezeigt hat, gibt es zu jeder positiven ganzen Zahl k eine Schranke, oberhalb welcher jede natürliche Zahl als Summe von lauter verschiedenen Gliedern der Folge $1^k, 2^k, \ldots$ darstellbar ist[1]). Mit Methoden, die den seinen nachgebildet sind, läßt sich folgender Satz beweisen:

Zu jedem Polynom $f(x)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ mit reellen Koeffizienten und $a_n>0$ gibt es eine positive Zahl s_0 derart, daß jede Zahl $z \geqq 0$ darstellbar ist in der Form

$$z = r + f(x_1) + f(x_2) + \cdots$$

mit $0<f(x_1)<f(x_2)<\cdots$, $0<x_1<x_2<\cdots$, ganzen positiven x_i und $0 \leqq r < s_0$.

Dem Beweis schicke ich eine Hilfsbetrachtung voraus. Sie dient der Konstruktion eines Systems von paarweis verschiedenen natürlichen Zahlen $b_{\mu\nu}$ mit

$$(1)\quad b_{11}^m + b_{12}^m + \cdots + b_{1k}^m = b_{21}^m + b_{22}^m + \cdots + b_{2k}^m = \cdots = b_{l1}^m + b_{l2}^m + \cdots + b_{lk}^m$$
$$\text{für} \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Ich wähle zunächst $l=4$ bei beliebigem n; auf den Wert von k kommt es nicht an. Für einen späteren Zweck beachte ich dabei, daß die $b_{\mu\nu}$ ungerade werden.

Aus

$$(2)\qquad 1 + 15 = 3 + 13 = 5 + 11 = 7 + 9$$

folgt, zunächst für $m=1$, die Gleichheit des Ausdrucks

$$(3)\quad \begin{cases} (1+y_{11})^m + (15+y_{11})^m + (3+y_{12})^m + (13+y_{12})^m + \\ \qquad + (5+y_{13})^m + (11+y_{13})^m + (7+y_{14})^m + (9+y_{14})^m \end{cases}$$

mit den durch zyklische Vertauschungen der y_{1i} daraus hervorgehenden drei anderen Ausdrücken.

Aber auch für $m=2$ ist (3) eine symmetrische Funktion der y_{1i}, da die Koeffizienten entsprechender Potenzen wegen (2) gleich sind. Um in den Klammern der $l=4$ Ausdrücke, wie erwähnt, lauter verschiedene ungerade Zahlen zu bekommen, braucht man nur die y_{1i} in geeigneter Weise zu wählen,

[1]) SPRAGUE, R.: Über Zerlegungen in n-te Potenzen mit lauter verschiedenen Grundzahlen. Math. Z. **51**, 466—468 (1948).

z.B. $y_{11}=0$, $y_{12}=16$, $y_{13}=32$, $y_{14}=48$. In diesem Falle erreicht man eine Einteilung der ungeraden Zahlen von 1 bis 63 in vier Klassen zu je acht Gliedern, die sowohl in der Summe als auch in der Summe der Quadrate ihrer Glieder übereinstimmen. Wiederholt man das Verfahren, das von (2) zu (3) führt, an diesen vier Klassen und wählt dabei $y_{21}=0$, $y_{22}=64$, $y_{23}=128$, $y_{24}=192$, so erhält man ein Gleichungssystem, das eine Einteilung der ungeraden Zahlen von 1 bis 255 in vier Klassen darstellt und deren Übereinstimmung sowohl in der Summe der Glieder als auch Summe der Quadrate und Summe der Kuben ausdrückt; usw.

Um allgemein l Klassen zu erhalten, geht man aus von

$$1+(4l-1)=3+(4l-3)=\cdots=(2l-1)+(2l+1)$$

und wählt

$$y_{\mu 1}=0, \qquad y_{\mu 2}=4l^{\mu}, \qquad y_{\mu\nu}=(\nu-1)\,y_{\mu 2},$$
$$\mu=1,2,\ldots,(n-1); \qquad \nu=3,4,\ldots,l.$$

Auf diese Weise erreicht man eine Einteilung der ungeraden Zahlen von 1 bis $4l^n-1$ in l Klassen (mit je $2l^{n-1}$ Gliedern), die in der Summe der m-ten Potenzen ihrer Glieder übereinstimmen für $m=1,2,\ldots,n$.

Man kann so mit jedem l bis zu jedem beliebigen n aufsteigen. Sämtliche Zahlen des so konstruierten Systems dürfen größer als eine vorgegebene Zahl x_0 angenommen werden; denn die Gültigkeit von (1) bleibt bestehen, wenn man jede Zahl $b_{\mu\nu}$ um dieselbe Konstante C vermehrt. Wählt man C gerade, so sind mit den $b_{\mu\nu}$ auch die $(b_{\mu\nu}+C)$ ungerade und paarweis verschieden.

Mit Hilfe dieser Betrachtung läßt sich der oben behauptete Satz leicht beweisen. Es sei $f(x)$ ein Polynom vom Grade $n>0$ mit reellen Koeffizienten:

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \qquad (a_n>0).$$

Für $x\to\infty$ gilt

$$\frac{f(2x)}{f(x)}\to 2^n;$$

daher ist

$$\frac{f(2x)}{f(x)}<2^n+1 \quad \text{für alle } x\geqq x_0,$$

wenn x_0 genügend groß gewählt wird. Ich nehme x_0 gleich so groß an, daß $f(x)$ für $x\geqq x_0$ monoton wächst und positiv ist. Wegen (1) ist

$$\sum_{i=1}^{k} f(b_{1i})=\cdots=\sum_{i=1}^{k} f(b_{li}).$$

Da man in (1) die $b_{\mu\nu}$ durch $2^t b_{\mu\nu}$ ersetzen darf, ist auch

$$\sum_{i=1}^{k} f(2^t b_{1i})=\cdots=\sum_{i=1}^{k} f(2^t b_{li})=s_t, \qquad t=0,1,2,\ldots. \tag{4}$$

Es kann, wie erwähnt, $b_{\mu\nu}\geqq x_0$ angenommen werden; dann ist für jedes $t=0,1,2,\ldots$

$$\frac{s_{t+1}}{s_t}<2^n+1.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß jede Zahl $z \geqq 0$ darstellbar ist in der Form

$$z = r + t_0 s_0 + t_1 s_1 + \cdots \quad \text{mit} \quad t_i \leqq 2^n \quad \text{und} \quad 0 \leqq r < s_0.$$

Jetzt sei in (1) $l = 2^n$. Dann stehen in (4) 2^n Ausdrücke für s_i zur Verfügung, und man kann $t_i s_i$ durch lauter verschiedene davon zusammensetzen. So erhält man im ganzen für z eine Darstellung

$$z = r + f(x_1) + f(x_2) + \cdots \quad \text{mit} \quad 0 \leqq r < s_0.$$

Dabei sind die natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \ldots$ paarweise verschieden; denn aus $x_p = x_q$, also $2^u b_{\mu_1 \nu_1} = 2^v b_{\mu_2 \nu_2}$ folgt wegen der paarweisen Verschiedenheit der ungeraden Zahlen $b_{\mu\nu}$ sowohl $u = v$ als auch $\mu_1 = \mu_2$ und $\nu_1 = \nu_2$, d.h. $p = q$.

Da alle Argumente $x_i \geqq x_0$ sind und daher positive, paarweise verschiedene Werte von $f(x)$ liefern, lassen sie sich so benennen, daß, wie behauptet, zugleich

$$0 < f(x_1) < f(x_2) < \cdots \quad \text{und} \quad 0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

gilt.

Berlin N 20, Steegerstr. 22.

(Eingegangen am 21. März 1953.)

GROTEMEYER, K. P.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 258 (1953)

Bemerkung zur Verbiegung konvexer Flächen.

Von
K. P. GROTEMEYER.

Wie in meiner Arbeit „Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschattengrenze ist" (Math. Z. Bd. 58, S. 272—280) bemerkt ist (auf S. 277 oben), gilt für eine beschränkte, konvexe[1]), dreimal stetig differenzierbare Fläche $\mathfrak{F}$, die von einer geschlossenen Eigenschattengrenze berandet wird: $G(\mathfrak{F}) \leqq 0$. Die dortige Gl. (15) ist für jede zu $\mathfrak{F}$ isometrische, dreimal stetig differenzierbare Fläche $\mathfrak{F}^*$ gültig. Es ist daher

$$2\pi \leqq \oint \cos(\Theta - \Theta^*)\, d\sigma^* \leqq \oint d\sigma^*.$$

Aus $\oint d\sigma^* = 2\pi$, d.h. aus $\oint \cos(\Theta - \Theta^*)\, d\sigma^* = 2\pi$ folgt $G(\mathfrak{F}) = 0$ und daraus die Kongruenz oder Symmetrie der Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$. Es gilt daher der Satz:

In der Gesamtheit $\{\mathfrak{F}^*\}$ der zu $\mathfrak{F}$ isometrischen, dreimal stetig differenzierbaren Flächen ist $\mathfrak{F}$ dadurch ausgezeichnet, die kürzeste Gesamtlänge (2π) des sphärischen Bildes der Randkurve zu besitzen. $\mathfrak{F}$ ist bis auf Bewegungen oder Spiegelungen die einzige Fläche in $\{\mathfrak{F}^*\}$ mit dieser Eigenschaft.

Speziell für die endlichen Verbiegungen dürfen wir daher sagen:

Bei jeder endlichen Verbiegung der Fläche $\mathfrak{F}$ wird die Gesamtbogenlänge des sphärischen Bildes der Randkurve länger. Das sphärische Bild der Randkurve behält nur dann seine Gesamtlänge, wenn die Verbiegung eine Bewegung oder Spiegelung ist.

Der Satz 3 der genannten Arbeit ist in diesen Sätzen enthalten, da das sphärische Bild einer Eigenschattengrenze, die geschlossen ist, stets ein Großkreis ist.

[1]) Auf der Fläche $\mathfrak{F}$ sind Punktmengen vom LEBESGUEschen Maß Null zugelassen, in denen die Gausssche Krümmung verschwindet. Sonst sei überall $K > 0$.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 10. Juli 1953.)

Volkmann, B.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 259—270 (1953)

Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind. III.*)

Von
Bodo Volkmann.

1. Ist $F=(f_1 f_2 \dots f_i)$ eine endliche Sequenz von $i \geqq 1$ nicht notwendig verschiedenen Ziffern im g-adischen Ziffernsystem, also eine geordnete Menge von i ganzen Zahlen f_j mit $0 \leqq f_j < g$, so sei $K(F, g)$ die Menge der reellen Zahlen ϱ mit $0 < \varrho \leqq 1$, in deren g-adischer Entwicklung

$$\varrho = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e_j}{g^j} \quad (e_j \text{ ganz};\ 0 \leqq e_j < g;\ \text{unendlich viele } e_j \neq 0;\ g \geqq 2) \tag{1}$$

die Sequenz F nicht auftritt. Man kann leicht einsehen, daß jede solche Menge $K(F, g)$ vom Lebesgueschen Maß Null ist, und es liegt daher nahe, nach der gebrochenen Dimension von $K(F, g)$ zu fragen. Diese wird in der vorliegenden Arbeit bestimmt.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{P}(F) = \{p_1, \dots, p_c\}$ die (möglicherweise leere) Menge der Zahlen p_s mit $0 < p_s < i$, für die die Sequenz der ersten p_s Ziffern und die der letzten p_s Ziffern von F gleich sind, und mit $\gamma(F, g)$ die größte reelle Wurzel der Gleichung

$$z^i - g\, z^{i-1} + \sum_{s=1}^{c} z^{p_s} - g \sum_{s=1}^{c} z^{p_s - 1} + 1 = 0, \tag{2}$$

worin bei leerem $\mathfrak{P}(F)$ die beiden Summen durch Null zu ersetzen sind, so gilt der

Satz 1. Die gebrochene Dimension von $K(F, g)$ ist

$$\dim K(F, g) = \frac{\log \gamma(F, g)}{\log g}.$$

In dem Spezialfall, wo die Sequenz F nur aus einer einzigen Ziffer besteht, also $i = 1$ ist, wird somit

$$\dim K(F, g) = \frac{\log (g-1)}{\log g}.$$

Dieses Ergebnis fand 1940 E. Best[1]). Ein anderer Spezialfall von Satz 1 wurde 1951 vom Verfasser[2]) bewiesen: Es sei $g = 2$, $i \neq 2$, und die Ziffern f_j

*) Die Teile I und II dieser Arbeit wurden in Bd. 58, 284—287 (1953) bzw. Bd. 59, 247—254 (1953) veröffentlicht. Zum Verständnis des vorliegenden Teiles ist nur die Terminologie von Teil I erforderlich.

[1]) Best, E.: On sets of fractional dimension. III. Proc. London Math. Soc. II, **47**, 436—454 (1942).

[2]) Volkmann, B.: Über Klassen von Mengen natürlicher Zahlen. J. reine angew. Math. **190**, 199—230 (1952), Satz 39.

der Sequenz F seien alle gleich Eins. Dann nimmt (2) die Form $z^i - \sum_{j=0}^{i-1} z^j = 0$ an, und wenn die positive Wurzel dieser Gleichung mit γ_i bezeichnet wird, ist

$$\dim K(F, g) = \frac{\log \gamma_i}{\log 2}.$$

Zum Beweis von Satz 1 führen wir in Nr. **2** eine besondere Art von Fächern im Sinne von TH. KALUZA jr.[3]) ein und beweisen für diese einen Satz, der auch unabhängig von der hier gemachten Anwendung von Interesse sein dürfte. Der eigentliche Beweis von Satz 1 zerfällt dann in einen ziffern-theoretischen (Nr. **3**) und einen maßtheoretischen Teil (Nr. **4**). Schließlich werden (Nr. **5** und **6**) einige Folgerungen bewiesen, insbesondere eine über das asymptotische Verhalten der Anzahlfunktion bei gewissen Mengen natürlicher Zahlen (Nr. **6**).

2. Einen unendlichen kreislosen zusammenhängenden Graphen endlichen Grades mit höchstens einem Endpunkt nennen wir mit K einen Fächer. Der Endpunkt eines solchen Fächers oder, falls ein solcher nicht vorhanden ist, irgendein anderer Knotenpunkt, werde mit A_0 bezeichnet. Legt man jeder Kante die Länge Eins zu, so läßt sich jedem Knotenpunkt A des Fächers eindeutig eine nichtnegative ganze Zahl zuordnen — wir nennen sie seinen Index —, die seine Entfernung von A_0, d.h. die Länge des eindeutig vorhandenen Weges $A_0 \dots A$ angibt. Dabei ist A_0 der einzige Knotenpunkt vom Index Null.

Da die Indizes der beiden Endpunkte einer Kante sich genau um Eins unterscheiden, wird der Fächer zu einem gerichteten Graphen durch die Festsetzung, daß die Richtung jeder Kante von einem Knotenpunkt mit niederem zu einem Knotenpunkt mit höherem Index verlaufen soll.

Ist A_n ein Knotenpunkt des Fächers Γ vom Index n, so bilden alle Knotenpunkte mit Indizes $\geq n$, die auf von A_0 aus über A_n verlaufenden Wegen liegen, zusammen mit den sie verbindenden Kanten einen gewissen Teilfächer $\Gamma(A_n)$ von Γ. Teilfächer dieser speziellen Form $\Gamma(A_n)$ für irgendein A_n wollen wir Unterfächer nennen.

Es kann nun vorkommen, daß mehrere Unterfächer einander oder auch dem Fächer $\Gamma = \Gamma(A_0)$ selbst gleich sind. Beispielsweise sind bei den in K eingeführten Fächern V_p, wo der Anfangspunkt A_0 vom Grade p und jeder weitere Knotenpunkt vom Grade $p+1$ ist, alle Unterfächer einschließlich V_p selbst einander gleich. Einen Fächer Γ, bei dem es unter den (abzählbar vielen) Unterfächern nur endlich viele verschiedene gibt, wollen wir einen E-Fächer nennen. Von solchen E-Fächern ist im folgenden ausschließlich die Rede.

Die Anzahl der verschiedenen Unterfächer eines E-Fächers Ξ sei k. Dann kann Ξ folgendermaßen durch eine k-reihige Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)$ beschrieben werden:

[3]) KALUZA, TH.: Struktur- und Mächtigkeitsuntersuchungen an gewissen unendlichen Graphen mit einigen Anwendungen auf lineare Punktmengen. Math. Ann. **122**, 235—258 (1950), im folgenden mit K bezeichnet.

Seien $\Xi_1, \ldots, \Xi_k$ die verschiedenen Unterfächer von Ξ und sei etwa $\Xi = \Xi_1$. Dann sei das Matrixelement $a_{\varkappa\lambda}$ gleich der Anzahl der Knotenpunkte A vom Index Eins des Fächers Ξ_λ, für die $\Xi(A) = \Xi_\varkappa$ ist. Wenn die Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)$ bekannt ist, läßt sich der Fächer Ξ von seinem Anfangspunkt A_0 aus sukzessive konstruieren, da mit jedem Knotenpunkt A, den man bei dieser Konstruktion erhält, vermöge einer Beziehung der Form $\Xi(A) = \Xi_\varkappa$ sein Grad gegeben ist.

Die Anzahl der Knotenpunkte vom Index n werde mit $h(n)$ bezeichnet. Dann gilt der

Satz 2. Bei einem E-Fächer Ξ genügt die Folge $h(n)$ der linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristische Gleichung die charakteristische Gleichung der Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)$ ist.

Beweis. Sei $V_n = \{A_n^1, \ldots, A_n^{h(n)}\}$ die Menge aller Knotenpunkte vom Index n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und $a_\varkappa(n)$ die Anzahl derjenigen unter ihnen, für die $\Xi(A_n) = \Xi_\varkappa$ ist $(\varkappa = 1, \ldots, k)$. Dann ist $h(n) = \sum_{\varkappa=1}^{k} a_\varkappa(n)$. Bezeichnet man die Elemente der Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)^n$ mit $a_{\varkappa\lambda}^{(n)}$, so gilt ferner

$$h(n) = \sum_{\varkappa=1}^{k} a_{\varkappa 1}^{(n)} \quad (n = 1, 2, \ldots;\ h(0) = 1). \tag{3}$$

Denn nach Definition wird $a_\varkappa(1) = a_{\varkappa 1}$ und

$$a_\varkappa(2) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\varkappa\lambda}\, a_\lambda(1) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\varkappa\lambda}\, a_{\lambda 1} = a_{\varkappa 1}^{(2)},$$

und wenn die Beziehung

$$a_\varkappa(n) = a_{\varkappa 1}^{(n)} \quad (\varkappa = 1, \ldots, k) \tag{4}$$

für irgendein n bewiesen ist, dann folgt

$$a_\varkappa(n+1) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\varkappa\lambda}\, a_\lambda(n) = \sum_{\lambda=1}^{k} a_{\varkappa\lambda}\, a_{\lambda 1}^{(n)} = a_{\varkappa 1}^{(n+1)},$$

so daß (4) für alle n gilt. Daraus folgt (3).

Die charakteristische Gleichung der Matrix $\mathfrak{A}(\Xi)$ sei

$$z^k + q_{k-1} z^{k-1} + \cdots + q_1 z + q_0 = 0.$$

Dann gilt nach der sog. Cayleyschen Relation[4])

$$\mathfrak{A}^k + q_{k-1}\mathfrak{A}^{k-1} + \cdots + q_1\mathfrak{A} + q_0\mathfrak{E} = \mathfrak{N} \quad (\mathfrak{E} = \text{Einheitsmatrix},\ \mathfrak{N} = \text{Nullmatrix}).$$

[4]) Siehe z. B. MacDuffee: The Theory of Matrices. Erg. Math. **2**, 18 (1946), 2. Aufl.

Nach Multiplikation mit $\mathfrak{A}^{n+1-k}$ erhält man somit für $n \geqq k$, wenn man die letzte Gleichung für ein einzelnes Matrixelement hinschreibt,

$$a_{\varkappa\lambda}^{(n+1)} + q_{k-1}\, a_{\varkappa\lambda}^{(n)} + \cdots + q_1\, a_{\varkappa\lambda}^{(n-k+2)} + q_0\, a_{\varkappa\lambda}^{(n-k+1)} = 0 \quad (\varkappa, \lambda = 1, \ldots, k).$$

Setzt man dies mit $\lambda = 1$ in (3) für jeden Summanden ein, so ergibt sich

$$h(n+1) + q_{k-1}\, h(n) + \cdots + q_1\, h(n-k+2) + q_0 h(n-k+1) = 0 \quad (n \geqq k).$$

3. Es sei $R_n = R_n(F, g)$ die Menge aller n-stelligen g-adischen Brüche, unter deren Ziffern die Sequenz F nicht auftritt ($n = 1, 2, \ldots$; $R_0 = \{0\}$). Bezeichnet man mit $I_n = I_n(F, g)$ die Menge der Intervalle $\mathfrak{i}_n^m$ der Länge g^{-n}, deren linker Endpunkt zu R_n gehört[5]), so ist $K(F, g) = \bigwedge_{n=0}^{\infty} I_n$, und offenbar gilt $I_n \geqq I_{n+1}$ ($n = 1, 2, \ldots$). Wir ordnen nun der Menge $K(F, g)$ einen Fächer $\Xi(F, g)$ derart zu, daß jedem Intervall $\mathfrak{i}_n^m$ ein Knotenpunkt — er werde ebenfalls mit $\mathfrak{i}_n^m$ bezeichnet — vom Index n entspricht, wobei für zwei Knotenpunkte $\mathfrak{i}_n^m$ und $\mathfrak{i}_{n'}^{m'}$ genau dann $\mathfrak{i}_n^m$ ein Knotenpunkt des Fächers $\Xi(\mathfrak{i}_{n'}^{m'})$ ist, wenn für die zugehörigen Intervalle $\mathfrak{i}_n^m \leqq \mathfrak{i}_{n'}^{m'}$ gilt. Jedem Knotenpunkt $\mathfrak{i}_n^m$ ist dann eindeutig der n-stellige g-adische Bruch aus R_n zugeordnet, der dem linken Endpunkt des Intervalls $\mathfrak{i}_n^m$ entspricht. Wenn j ($0 \leqq j < i$) die größte Zahl ist, für die die Sequenz der letzten j Ziffern dieses Bruches mit der Sequenz der ersten j Ziffern von F übereinstimmt, so sagen wir, der Unterfächer $\Xi(\mathfrak{i}_n^m)$ sei vom Typ Ξ_j. Sind $\Xi(\mathfrak{i}_n^m)$ und $\Xi(\mathfrak{i}_r^t)$ zwei Unterfächer vom gleichen Typ und sind etwa

$$0, e_1 \ldots e_{n-j} f_1 \ldots f_j \quad \text{und} \quad 0, e_1' \ldots e_{r-j}' f_1 \ldots f_j$$

die zugehörigen g-adischen Brüche aus R_n bzw. R_r, so ist $\Xi(\mathfrak{i}_n^m) = \Xi(\mathfrak{i}_r^t)$. Denn wenn $\mathfrak{i}_{n+k}^s$ irgendein Knotenpunkt aus $\Xi(\mathfrak{i}_n^m)$ ist, der zugehörige g-adische Bruch $0, e_1 \ldots e_{n-j} f_1 \ldots f_j e_{n+1} \ldots e_{n+k}$ also nicht die Sequenz F enthält, so enthält auch der Bruch $0, e_1 \ldots e_{r-j} f_1 \ldots f_j e_{n-1} \ldots e_{n+k}$ die Sequenz F nicht, gehört also zu einem Knotenpunkt von $\Xi(\mathfrak{i}_r^t)$. Da auch umgekehrt jedem Knotenpunkt von $\Xi(\mathfrak{i}_r^t)$ ein Knotenpunkt von $\Xi(\mathfrak{i}_n^m)$ entspricht und alle Inklusionen zugehöriger Intervalle bei dieser Zuordnung trivialerweise erhalten bleiben, folgt $\Xi(\mathfrak{i}_n^m) = \Xi(\mathfrak{i}_r^t)$. Also ist $\Xi(F, g)$ ein E-Fächer mit i verschiedenen Typen $\Xi_0, \ldots, \Xi_{i-1}$ von Unterfächern.

Die Anzahl der Knotenpunkte von $\Xi(F, g)$ vom Index n, die definitionsgemäß gleich der Anzahl der Elemente von R_n ist, werde wie die entsprechende Anzahl bei den allgemeineren Betrachtungen von Nr. **2** mit $h(n) = h(n; F, g)$ bezeichnet. Wir benötigen drei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Die Folge $h(n)$ genügt der Differenzengleichung[6])

$$(5) \quad h(n+1) = g\, h(n) - \sum_{s=1}^{c} h(n+1-i+p_s) + g \sum_{s=1}^{c} h(n-i+p_s) - h(n-i+1) \quad (n \geqq i-1)$$

[5]) Die Intervalle $\mathfrak{i}_n^m$ sollen nach links abgeschlossen und nach rechts offen sein.

[6]) Wenn $\mathfrak{P}(F)$ leer ist, sind die Summen in (5) fortzulassen.

mit den Anfangsbedingungen

$$h(n) = g^n \qquad (n = 0, \ldots, i-1). \tag{6}$$

Beweis. Da im Falle $0 \leqq n < i$ die Menge R_n alle g^n möglichen Brüche enthält, ist (6) richtig. Zum Beweise von (5) bezeichnen wir wie in Nr. 2 mit $a_j(n)$ die Anzahl der Knotenpunkte $\mathfrak{i}_n^m$ vom Index n, bei denen der Unterfächer $\Xi(\mathfrak{i}_n^m)$ gleich Ξ_j ist. Dann ist offenbar

$$h(n+1) = g\,h(n) - a_{i-1}(n) \qquad (n \geqq i-1); \tag{7}$$

denn jedes Intervall $\mathfrak{i}_n^m$ enthält g oder $g-1$ Intervalle mit Knotenpunkten vom Index $n+1$, je nachdem ob die Sequenz F durch Anfügen einer Ziffer an den zu $\mathfrak{i}_n^m$ gehörigen Bruch erzeugt werden kann oder nicht. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Wenn $\mathfrak{P}(F)$ leer ist, gilt

$$a_{i-1}(n) = h(n-i+1), \tag{8}$$

da dann jeder Bruch $0, e_1 \ldots e_{n-i+1}$ aus R_{n-i+1} durch Anfügen der Ziffernsequenz $f_1 \ldots f_{i-1}$ in einen Bruch aus R_n übergeht, also $h(n-i+1) \leqq a_{i-1}(n)$ gilt und umgekehrt sicher $a_{i-1}(n) \leqq h(n-i+1)$ ist.

b) Wenn $\mathfrak{P}(F)$ nicht leer und p ein Element dieser Menge ist, kann ein Bruch $0, e_1 \ldots e_{n-i+1} f_1 \ldots f_{i-1}$ die Form

$$0, e_1 \ldots e_{n-i+1-p} f_1 \ldots f_p f_1 \ldots f_{i-1} = 0, e_1 \ldots e_{n-i+1-p} F f_{i-p+1} \ldots f_{i-1}$$

haben und somit die Sequenz F enthalten. An Stelle von (8) erhält man

$$a_{i-1}(n) = a_{p_c-1}(n-i+p_c) - a_{i-1}(n-i+p_c)$$

und ebenso

$$a_{p_s-1}(n-i+p_s) = a_{p_{s-1}-1}(n-i+p_{s-1}) - a_{i-1}(n-i+p_{s-1}) \quad (s = 2, \ldots, c)$$

sowie schließlich

$$a_{p_1-1}(n-i+p_1) = h(n-i+1),$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die Elemente der Menge $\mathfrak{P}(F) = \{p_1, \ldots, p_c\}$ der Größe nach angeordnet sind. Mit Hilfe dieser Gleichungen erhält man aus (7)

$$\begin{aligned} h(n+1) &= g\,h(n) - a_{p_c-1}(n-i+p_c) + a_{i-1}(n-i+p_c) \\ &= g\,h(n) - a_{p_{c-1}-1}(n-i+p_{c-1}) + a_{i-1}(n-i+p_{c-1}) + \\ &\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad + a_{i-1}(n-i+p_c) \\ h(n+1) &= g\,h(n) + \sum_{s=1}^{c} a_{i-1}(n-i+p_s) - h(n-i+1). \end{aligned}$$

Setzt man hierin gemäß (7)

$$a_{i-1}(n-i+p_s) = g\,h(n-i+p_s) - h(n+1-i+p_s),$$

so ergibt sich die Behauptung (5).

Die zu dem E-Fächer $\Xi(F, g)$ gehörende i-reihige Matrix werde mit $\mathfrak{A}(F, g)$ bezeichnet. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ die verschiedenen Eigenwerte von $\mathfrak{A}(F, g)$ und $v_1, \ldots, v_q$ ihre Vielfachheiten $\left(\sum_{j=1}^{q} v_j = i\right)$, so folgt aus Satz 2 auf Grund der Theorie der linearen Differenzengleichungen[7]), daß $h(n)$ sich in der Form

$$h(n) = P_1(n)\,\lambda_1^n + \cdots + P_q(n)\,\lambda_q^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

darstellen läßt, wobei jedes $P_j(n)$ ein Polynom von einem Grade $\leq v_j - 1$ ist. Entsprechend gibt es, wenn die verschiedenen Wurzeln von (2) mit $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ und ihre Vielfachheiten mit $v_1', \ldots, v_r'$ bezeichnet werden, eine Darstellung der Form

$$h(n) = P_1'(n)\,\gamma_1^n + \cdots + P_r'(n)\,\gamma_r^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

wobei jedes $P_j'(n)$ ein Polynom von einem Grade $\leq v_j' - 1$ ist; denn (2) ist die charakteristische Gleichung der Differenzengleichung (5). Da (9) und (10) für alle n gelten, sind, wie sich leicht zeigen läßt, beide Darstellungen identisch, d.h. es ist $r = q$ und bei geeigneter Numerierung der λ_j auch $\lambda_j = \gamma_j$ sowie $P_j(n) = P_j'(n)$ $(j = 1, \ldots, r)$.

Hilfssatz 2. Keines der Polynome $P_j(n)$ verschwindet identisch.

Beweis. Sei etwa $j = 1$ und $P_1(n) = \sigma_w n^w + \sigma_{w-1} n^{w-1} + \cdots + \sigma_0$ mit $w = v_1 - 1$. Angenommen, es ist $\sigma_w = \sigma_{w-1} = \cdots = \sigma_1 = 0$. Dann gibt es, falls die Wurzeln $\gamma_2, \ldots, \gamma_r$ alle einfach sind, also $r = i - w$ ist, nach (10) eine Darstellung $h(n) = \tau_1 \gamma_1^n + \cdots + \tau_r \gamma_r^n$ mit konstanten τ_j, wobei $\tau_1 = \sigma_0$ ist. Da somit nach (6) $\tau_1 \gamma_1^j + \cdots \tau_r \gamma_r^j = g^j$ $(j = 0, \ldots, r-1)$ gilt, folgt $\tau_1 = \Delta_1/\Delta$, wenn

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} g^0 & \gamma_2^0 & \cdots \gamma_r^0 \\ g^1 & \gamma_2^1 & \cdots \gamma_r^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g^{r-1} & \gamma_2^{r-1} & \cdots \gamma_r^{r-1} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta = \begin{vmatrix} \gamma_1^0 & \gamma_2^0 & \cdots \gamma_r^0 \\ \gamma_1^1 & \gamma_2^1 & \cdots \gamma_r^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1^{r-1} & \gamma_2^{r-1} & \cdots \gamma_r^{r-1} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird. Da $\Delta_1 = \prod_{j=2}^{r} (g - \gamma_j) \prod_{\substack{k,l=2 \\ k<l}}^{r} (\gamma_k - \gamma_l)$ und $\Delta = \prod_{\substack{k,l=1 \\ k<l}}^{r} (\gamma_k - \gamma_l)$ ist, also $\Delta \neq 0$ ausfällt, wird

$$\tau_1 = \frac{\prod_{j=2}^{r} (g - \gamma_j)}{\prod_{j=2}^{r} (\gamma_1 - \gamma_j)},$$

und eine Stetigkeitsbetrachtung zeigt, daß diese Gleichung auch bestehen bleibt, wenn unter den Wurzeln $\gamma_2, \ldots, \gamma_r$ mehrfache vorkommen. Da die Gl. (2) sich in der Form $(z - g) \sum_{s=1}^{c+1} z^{p_s - 1} + 1 = 0$ schreiben läßt $(p_{c+1} = i)$, ist g keine Wurzel und daher $\tau_1 \neq 0$.

[7]) Siehe z.B. NÖRLUND: Vorlesungen über Differenzenrechnung, S. 297. Berlin 1924.

Setzt man $\gamma(F, g) = \gamma_1$, so gilt der

Hilfssatz 3. Ist σ_v der höchste nichtverschwindende Koeffizient von $P_1(n)$, so ist

$$h(n) = \gamma_1^n n^v (\sigma_v + o(1)).$$

Beweis. Da die Elemente der Matrix $\mathfrak{A}(F, g)$ nichtnegativ sind, ist nach einem Satz von Frobenius[8]) die Wurzel $\gamma(F, g) = \gamma_1 > |\gamma_j|$ für $j = 2, \ldots, r$. Somit wird nach Hilfssatz 2

$$h(n) = \gamma_1^n P_1(n) (1 + o(1)) = \gamma_1^n n^v (\sigma_v + o(1)).$$

4. Um nun den eingangs formulierten Satz 1 zu beweisen, verwenden wir folgenden

Satz von Moran[9]). Ist $\mu(t)$ eine stetige, monoton wachsende Funktion mit $\mu(0) = 0$ und M eine abgeschlossene beschränkte lineare Punktmenge mit $\mu\{M\} < \infty$, so ist dann und nur dann $\mu\{M\} > 0$, wenn es eine nichtnegative Funktion $\Phi(R)$ von halboffenen Intervallmengen[10]) R gibt derart, daß für gewisse Konstanten $\varkappa_1 > 0$ und $\varkappa_2 > 0$ folgendes gilt[11]):

a) $\Phi(R) \leqq \varkappa_1 \mu(|R|)$ für jede halboffene Intervallmenge R,

b) $\Phi(R) \geqq \varkappa_2$ für jede halboffene Intervallmenge R mit $R \supseteq M$.

Es soll gezeigt werden, daß dieser Satz auf die abgeschlossene Hülle $K'(F, g)$ von $K(F, g)$ mit

$$\mu(t) = t^{\frac{\log \gamma_1}{\log g}} \left(\frac{\log g}{-\log t}\right)^v, \qquad \mu(0) = 0$$

anwendbar ist. Da die Differenz $K'(F, g) - K(F, g)$ eine abzählbare Menge ist, gelten die Überlegungen wegen $\mu\{K(F, g)\} = \mu\{K'(F, g)\}$ dann auch für $K(F, g)$.

Die Voraussetzung $\mu\{K'(F, g)\} < \infty$ ist sicher erfüllt; denn jedes I_n bildet eine g^{-n}-Überdeckung von $K(F, g)$, und daher wird, wenn man $\frac{\log \gamma_1}{\log g} = \alpha$ setzt, nach Hilfssatz 3

$$\begin{cases} \mu\{K'(F, g)\} = \mu\{K(F, g)\} \leqq \lim\limits_{n \to \infty} h(n) \mu(g^{-n}) \\ \qquad = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\gamma_1^n n^v (\sigma_v + o(1))}{g^{n\alpha} n^v} = \sigma_v < \infty. \end{cases} \tag{11}$$

Zur Konstruktion einer Funktion $\Phi(R)$ mit den verlangten Eigenschaften definieren wir zunächst für jedes Intervall $\mathfrak{i}_n^m$ die Funktion $\psi(\mathfrak{i}_n^m) = \gamma_1^{-n} n^{-v}$ und setzen für jede halboffene Intervallmenge R

$$\Phi(R) = \lim_{n \to \infty} \psi(\mathfrak{i}_n^m), \tag{12}$$

[8]) Frobenius, G.: Über Matrizen aus positiven Elementen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. **26**, 471—476 (1908), § 4.

[9]) Moran, P. A. P.: Additive functions of intervals and Hausdorff measure. Proc. Cambridge Philos. Soc. **42**, 15—23 (1946), Theorem I. Wir spezialisieren den Satz hier auf den Fall linearer Mengen.

[10]) Unter einer halboffenen Intervallmenge wird die Vereinigungsmenge von endlich vielen halboffenen Intervallen verstanden.

[11]) Den Durchmesser einer Punktmenge W bezeichnen wir mit $|W|$.

wobei über alle $\mathfrak{i}_n^m$ mit festem n summiert wird, die ganz in R liegen. Um zu zeigen, daß dieser Grenzwert existiert, gehen wir in mehreren Schritten vor:

1. Sei R ein Intervall $\mathfrak{i}_j^m$. Bezeichnet man die Anzahl der darin enthaltenen Intervalle $\mathfrak{i}_n^{m'}$ $(n \geqq j)$ mit $h_j^{(m)}(n-j)$, so genügt diese Folge in n wie $h(n)$ der Differenzengleichung (5), da sich die dortige Herleitung wörtlich beibehalten läßt. Somit gibt es eine Darstellung

$$h_j^{(m)}(n) = P_{1mj}(n)\,\gamma_1^n + \cdots + P_{rmj}(n)\,\gamma_r^n \qquad (n \geqq j),$$

wobei jedes $P_{tmj}(n)$ ein Polynom in n von einem Grade $\leqq v_t - 1$ ist. Dabei ist der Grad u von $P_{1mj}(n)$ sicher $\leqq v$; denn andernfalls wäre etwa

$$P_{1mj}(n) = \zeta_u n^u + \zeta_{u-1} n^{u-1} + \cdots + \zeta_0 \quad \text{mit} \quad \zeta_u \neq 0,$$

und daher erhielte man die asymptotische Gleichung

$$\frac{h_j^{(m)}(n)}{h(n)} \cong \frac{\gamma_1^{n-j}(n-j)^u \zeta_u}{\gamma_1^n n^v \sigma_v} \to \infty,$$

während doch trivialerweise $\dfrac{h_j^{(m)}(n)}{h(n)} \leqq 1$ ist. Setzt man daher $P_{1mj}(n)$ formal als Polynom vom Grade v an, wobei der höchste Koeffizient verschwinden darf, so wird in jedem Falle

$$\Phi(\mathfrak{i}_j^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{h_j^{(m)}(n)}{\gamma_1^n n^v} = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_1^{n-j}(n-j)^v \zeta_v}{n^v} = \frac{\zeta_v}{\gamma_1^j},$$

so daß der Grenzwert $\Phi(\mathfrak{i}_j^m)$ existiert.

2. Sei R Vereinigungsmenge von endlich vielen, sich nicht überschneidenden Intervallen $\mathfrak{i}_j^m$. Dann existiert der Grenzwert $\Phi(R)$ und ist gleich der Summe der zu diesen Intervallen gehörenden Werte $\Phi(\mathfrak{i}_j^m)$, wie man unmittelbar erkennt.

3. Sei R ein beliebiges Intervall $\mathfrak{r}$ und sei n_0 so groß gewählt, daß $g^{-n_0} < |\mathfrak{r}|$ wird. Für $n \geqq n_0$ ist dann, da es höchstens zwei Intervalle von I_{n_0} gibt, die mit $\mathfrak{r}$ einen nichtleeren Durchschnitt haben, ohne ganz in $\mathfrak{r}$ enthalten zu sein,

$$0 \leqq \sum_{\mathfrak{i}_n^m \leqq \mathfrak{r}} \Phi(\mathfrak{i}_n^m) - \sum_{\mathfrak{i}_{n_0}^{m'} \leqq \mathfrak{r}} \Phi(\mathfrak{i}_{n_0}^{m'}) \leqq 2\Phi(\mathfrak{i}_{n_0}^{m'}),$$

wie aus (12) hervorgeht. Da $\lim\limits_{n_0\to\infty} 2\Phi(\mathfrak{i}_{n_0}^{m'}) = 0$ ist, existiert der Grenzwert $\Phi(\mathfrak{r})$.

4. Sei R irgendeine halboffene Intervallmenge, also etwa $R = \mathfrak{r}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{r}_t$, wobei diese $\mathfrak{r}_j$ halboffene, sich nicht überschneidende Intervalle sind. Dann kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß zwischen je zweien dieser Intervalle immer ein Intervall liegt, das keinen Punkt von R enthält, und man kann den Schritt 3. auf jedes $\mathfrak{r}_j$ gesondert anwenden, woraus folgt, daß der Grenzwert $\Phi(R)$ existiert und $\Phi(R) = \sum\limits_{j=1}^{t} \Phi(\mathfrak{r}_j)$ ist.

Damit ist $\Phi(R)$ für alle R definiert, und eine einfache Betrachtung zeigt, daß $\Phi(R)$ auch additiv ist. Wir haben nun zu zeigen, daß die Voraussetzungen a) und b) des Satzes von Moran erfüllt sind.

Zu a). Sei R eine halboffene Intervallmenge und sei k so bestimmt, daß $g^{-(k+1)} \leqq |R| < g^{-k}$ wird. Ist $\varrho \in R$, so wird R sicher von dem Intervall $[\varrho - |R|,\ \varrho + |R|]$ überdeckt. Daher wird, wenn etwa $i_{k+1}^{j_1}, \ldots, i_{k+1}^{j_l}$ die in $[\varrho - |R|,\ \varrho + |R|]$ enthaltenen Intervalle von I_{k+1} sind,

$$\Phi(R) \leqq \sum_{\lambda=1}^{l} \Phi(i_{k+1}^{j_\lambda}) = \frac{l}{\gamma_1^{k+1}(k+1)^v}.$$

Trivialerweise ist $l \leqq \frac{2|R|}{g^{-(k+1)}}$ und damit

$$\Phi(R) \leqq \frac{2|R|}{g^{-(k+1)}\gamma_1^{k+1}(k+1)^v} = \frac{2|R|g^{k+1}}{(k+1)^v g^{\alpha(k+1)}} = \frac{2|R|^{1-\alpha} g^{(k+1)(1-\alpha)}}{(k+1)^v} \cdot |R|^\alpha.$$

Daraus folgt, da $|R| g^{k+1} < g$ ist,

$$\Phi(R) \leqq 2g^{1-\alpha} \frac{|R|^\alpha}{(k+1)^v} \leqq \varkappa_1 |R|^\alpha \left(\frac{\log g}{-\log |R|}\right)^v = \varkappa_1 \mu(|R|).$$

Zu b): Sei $R \geqq K'(F, g)$. Ist etwa $R = \mathfrak{r}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{r}_t$, wo diese $\mathfrak{r}_j$ halboffene Intervalle sind, so gibt es bei genügend großem n höchstens $2t$ Intervalle von I_n, die nicht vollständig in R enthalten sind. Daher wird nach Hilfssatz 3 und (12)

$$\Phi(R) \geqq \lim_{n\to\infty} \frac{h(n) - 2t}{g^{n\alpha} n^v} = \sigma_v > 0.$$

Also ist der Satz von Moran anwendbar, und man erhält $\mu\{K'(F, g)\} > 0$, also nach (11)

$$0 < \mu\{K(F, g)\} = \mu\{K'(F, g)\} < \infty.$$

Für das mit der Funktion $\mu^{(\beta)}(t) = t^\beta$ $(0 < \beta < 1)$ gebildete Maß $\mu^{(\beta)}\{K(F, g)\}$ wird somit für jede hinreichend kleine positive ε, da immer

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mu^{(\alpha-\varepsilon)}(t)}{\mu(t)} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\mu^{(\alpha+\varepsilon)}(t)}{\mu(t)} = 0$$

ist, $\mu^{(\alpha-\varepsilon)}\{K(F, g)\} = \infty$ und $\mu^{(\alpha+\varepsilon)}\{K(F, g)\} = 0$, woraus die Behauptung $\dim K(F, g) = \alpha = \frac{\log \gamma_1}{\log g}$ folgt.

5. Als naheliegende Verallgemeinerung von Satz 1 ergibt sich der

Satz 3. Sei $E(F, g)$ die Menge der Zahlen ϱ mit $0 < \varrho \leqq 1$, in deren g-adischer Entwicklung (1) die Sequenz F höchstens endlich oft auftritt. Dann ist

$$\dim E(F, g) = \frac{\log \gamma(F, g)}{\log g}.$$

Beweis. Ist $\varrho \in E(F, g)$, so tritt in der zugehörigen g-adischen Entwicklung (1) die Sequenz F von einer gewissen Stelle an nicht auf. Folglich gibt

es ein n derart, daß $\chi = g^n \varrho - [g^n \varrho]$ zu $K(F, g)$ gehört oder verschwindet. Daher wird, wenn man die Menge der Zahlen $\varrho = (\chi + k)\, g^{-n}$ mit $\chi \in K(F, g)$, $0 < \varrho \leqq 1$ und ganzem k als $K_n(F, g)$ bezeichnet,

$$E(F, g) = \bigvee_{n=1}^{\infty} K_n(F, g).$$

Da $K_n(F, g)$ sich als Vereinigungsmenge von g^n elementfremden Mengen auffassen läßt, von denen jede im Verhältnis $1 : g^n$ zu $K(F, g)$ geometrisch ähnlich ist, wird $\dim K_n(F, g) = \dim K(F, g) = \dfrac{\log \gamma(F, g)}{\log g}$ und damit[12]) auch

$$\dim E(F, g) = \dim \Big(\bigvee_{n=1}^{\infty} K_n(F, g) \Big) = \dim K(F, g) = \frac{\log \gamma(F, g)}{\log g}.$$

Satz 4. Die Menge N_g der Zahlen ϱ mit $0 < \varrho \leqq 1$, in deren g-adischer Entwicklung (1) nicht jede Sequenz F auftritt, hat die Dimension Eins und das LEBESGUEsche Maß Null.

Beweis. Offenbar ist N_g die Vereinigungsmenge aller $K(F, g)$, wobei F alle abzählbar vielen g-adischen Sequenzen durchläuft. Für jedes F ist, wie man aus (2) erkennt, $\gamma(F, g) < g$ und damit $\dim K(F, g) < 1$. Daher ist für jedes F das LEBESGUEsche Maß $\mu^{(1)}\{K(F, g)\} = 0$ und somit auch $\mu^{(1)}\{N_g\} = 0$. Andererseits entnimmt man der Gl. (2), daß für hinreichend großes i die Wurzel $\gamma(F, g)$ beliebig nahe an g und damit $\dim K(F, g)$ beliebig nahe an Eins liegt. Daraus folgt die Behauptung wegen[12]) $\dim N_g = \overline{\operatorname{fin}}_F \dim K(F, g)$.

Satz 5. Dann und nur dann ist $\dim K(F, g) = 0$, wenn $g = 2$ und F von der Form (0), (1), (01) oder (10) ist. In diesen vier Fällen ist $K(F, g)$ sogar abzählbar.

Beweis. Wenn $\dim K(F, g) = 0$ ist, so folgt $\gamma(F, g) = 1$ und damit nach (2)

$$1 - g + c(1 - g) + 1 = 0,$$

d.h. $(g - 1)(c + 1) = 1$. Da $g - 1$ und $c + 1$ natürliche Zahlen sind, so folgt $g = 2$ und $c = 0$. Die Menge $\mathfrak{P}(F)$ ist also leer, und (2) nimmt die Gestalt

$$z^i - 2z^{i-1} + 1 = 0$$

an. Da die linke Seite gleich $(z - 1)\Big(z^{i-1} - \sum_{j=0}^{i-2} z^j\Big)$ ist, so folgt aus der Bedingung, daß $\gamma(F, 2) = 1$ die größte Wurzel von (2) ist, $i \leqq 2$, wie eine einfache algebraische Betrachtung zeigt. Im Falle $i = 1$ gibt es die beiden Sequenzen (0) und (1), im Falle $i = 2$ bei leerem $\mathfrak{P}(F)$ die beiden Sequenzen (01) und 10), also insgesamt gerade die vier im Satz genannten Sequenzen.

Offenbar besteht $K\big((0), 2\big)$ nur aus der Zahl $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$, und $K\big((1), 2\big)$ ist leer, da außer der Null jede Zahl Einsen in ihrer dyadischen Entwicklung aufweist, diese aber keine dyadische Entwicklung im Sinne von (1) hat.

[12]) Siehe z.B. VOLKMANN, B.: l. c. [8]), Satz 27.

Schließlich besteht $K((10), 2)$ aus den abzählbar vielen Zahlen der Form $\varrho_n = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, und $K((01), 2)$ ist gleich $K((0), 2)) = \{1\}$.

Sind zwei verschiedene g-adische Ziffernsequenzen $F = (f_1 \ldots f_i)$ und $F' = (f'_1, \ldots, f'_{i'})$ gegeben, so erhebt sich die Frage, welche der Mengen $K(F, g)$ und $K(F', g)$ die größere Dimension hat, d.h. welche von den Zahlen $\gamma(F, g)$ und $\gamma(F', g)$ die größere ist. Hierzu beweisen wir den

Satz 6. a) Ist $i < i'$, so wird $\gamma(F, g) \leqq \gamma(F', g)$, wobei die Gleichheit genau dann eintritt, wenn $g = 2$, $i' = i + 1$, $\mathfrak{P}(F) = \{1, 2, \ldots, i-1\}$ und $\mathfrak{P}(F')$ leer ist.

b) Ist $i = i'$ und $\mathfrak{P}(F) = \mathfrak{P}(F')$, so ist $\gamma(F, g) = \gamma(F', g)$.

c) Ist $i = i'$, $\mathfrak{P}(F) \neq \mathfrak{P}(F')$ und etwa p das größte Element der symmetrischen Differenz[13]) von $\mathfrak{P}(F)$ und $\mathfrak{P}(F')$, so ist $\gamma(F, g) < \gamma(F', g)$ oder $\gamma(F', g) < \gamma(F, g)$, je nachdem ob p zu $\mathfrak{P}(F)$ oder zu $\mathfrak{P}(F')$ gehört.

Beweis. Die linke Seite von (2) läßt sich in der Form

$$f(\mathfrak{P}(F), g, i; z) = (z - g) \sum_{s=1}^{c+1} z^{p_s - 1} + 1 \qquad (p_{c+1} = i) \tag{13}$$

schreiben, woraus unmittelbar zu entnehmen ist, daß $g - 1 \leqq \gamma(F, g) < g$ gilt. Für reelles z mit $0 < z < g$ ist, wenn man die leere Menge mit $\mathfrak{L}$ und die Menge $\{1, 2, \ldots, i-1\}$ mit $\mathfrak{B}_i$ bezeichnet, offenbar

$$f(\mathfrak{B}_i, i, g; z) \leqq f(\mathfrak{P}(F), i, g; z) \leqq f(\mathfrak{L}, i, g; z)$$

für jede Sequenz F von der Länge i. Da ferner in dem betrachteten Intervall

$$\left\{\begin{aligned} f(\mathfrak{L}, i+1, g; z) &= z^{i+1} - g z^i + 1 \leqq z^{i+1} - g z^i + g - 1 \\ &= (z-1)\left(z^i - (g-1)\sum_{j=0}^{i-1} z^j\right) = (z-1) f(\mathfrak{B}_i, i, g; z) \end{aligned}\right. \tag{14}$$

ist, folgt für die zugehörigen Wurzeln, wenn $\gamma(F, g) = \gamma(\mathfrak{P}(F), i, g)$ geschrieben wird,

$$\gamma(\mathfrak{L}, i, g) = \gamma(\mathfrak{P}(F), i, g) \leqq \gamma(\mathfrak{B}_i, i, g) = \gamma(\mathfrak{L}, i+1, g).$$

Wie aus (14) hervorgeht, ist genau dann $\gamma(\mathfrak{B}_i, i, g) = \gamma(\mathfrak{L}, i+1, g)$, wenn $g = 2$ ist, und damit ist Teil a) bewiesen.

Teil b) folgt unmittelbar aus Satz 1.

Zum Beweise von Teil c) ist zu berücksichtigen, daß etwa im Falle $p \in \mathfrak{P}(F)$ für reelles z mit $0 < z < g$

$$f(\mathfrak{P}(F), i, g; z) - f(\mathfrak{P}(F'), i, g; z) = (z - g)\left(z^{p-1} + \sum_{\substack{p_s < p \\ p_s \in \mathfrak{P}(F)}} z^{p_s - 1} - \sum_{\substack{p'_i < p \\ p'_i \in \mathfrak{P}(F')}} z^{p'_i - 1}\right) \tag{15}$$

wird. Der zweite Faktor rechts ist ein Polynom der Form

$$z^{p-1} - a_{p-2} z^{p-2} + \cdots + a_0 \qquad (a_j = 1, -1 \text{ oder } 0),$$

[13]) Die symmetrische Differenz zweier Mengen besteht bekanntlich aus den Elementen, die zu genau einer von beiden gehören.

ist also im betrachteten Intervall $\geqq z^{p-1} - \sum_{j=0}^{p-2} z^j$ und daher für $z > \gamma(\mathfrak{V}_{i-1}, i-1, 2)$, also erst recht für $z > \gamma(\mathfrak{V}_{i-1}, i-1, g)$ positiv. Nach (15) ist folglich

$$\gamma(\mathfrak{P}(F), i, g) < \gamma(\mathfrak{P}(F'), i, g).$$

6. Sei $\mathfrak{N}(F, g)$ die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen, in deren g-adischer Entwicklung

$$k = \sum_{j=1}^{n} e_j g^j \qquad (0 \leqq e_j < g)$$

die Sequenz F nicht auftritt, und sei $K(F, g; x) = K(x)$ die Anzahl der Elemente $k \in \mathfrak{N}(F, g)$ mit $k \leqq x$. Dann gilt der

Satz 7. Es gibt positive Konstanten β_1 und β_2 mit

$$\beta_1 x^{\frac{\log \gamma(F,g)}{\log g}} \left(\frac{\log x}{\log g}\right)^v < K(x) < \beta_2 x^{\frac{\log \gamma(F,g)}{\log g}} \left(\frac{\log x}{\log g}\right)^v.$$

Beweis. Ist ϱ ein Element der Menge $R_n(F, g)$ von Nr. 3 und etwa $\varrho = \sum_{j=1}^{n} \frac{e_j}{g^j}$ die zugehörige g-adische Entwicklung, so ist die ganze Zahl $k = \sum_{j=0}^{n-1} e_j g^{n-j}$ ein Element von $\mathfrak{N}(F, g)$ mit $0 \leqq k < g^n$. Da auch umgekehrt jeder ganzen Zahl $k \in \mathfrak{N}(F, g)$ mit $0 \leqq k < g^n$ in entsprechender Weise eindeutig ein Element von $R_n(F, g)$ zugeordnet werden kann, ist

$$h(n) = K(g^n - 1) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Folglich ist für jede ganze Zahl x mit $g^n \leqq x < g^{n+1}$ offenbar

$$h(n) \leqq K(x-1) < h(n+1)$$

und damit

$$h\left(\left[\frac{\log x}{\log g}\right]\right) \leqq K(x-1) < h\left(\left[\frac{\log x}{\log g}\right] + 1\right),$$

also auf Grund von Hilfssatz 3

$$\left[\frac{\log x}{\log g}\right]^v \gamma_1^{\left[\frac{\log x}{\log g}\right]} (\sigma_v + o(1)) \leqq K(x-1) < \left(\left[\frac{\log x}{\log g}\right] + 1\right) \gamma_1^{\left[\frac{\log x}{\log g}\right]+1} (\sigma_v + o(1)).$$

Hieraus folgt die Behauptung, da $0 \leqq K(x) - K(x-1) \leqq 1$ ist.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 15. Juli 1953.)

Zeller, K.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 271—277 (1953)

Über die Darstellbarkeit von Limitierungsverfahren mittels Matrixtransformationen.

Von
K. Zeller.

1. Einleitung.

Ein Limitierungsverfahren V ist eine Vorschrift, durch die jeder Zahlenfolge $\mathfrak{x}=\{x_k\}$ aus dem Wirkfeld $\mathfrak{V}$ dieses Verfahrens ein Grenzwert $V\text{-}\lim x_k$ zugeordnet wird. Zwei Verfahren V und W heißen äquivalent, wenn sie dasselbe Wirkfeld besitzen und jeder Folge aus dem Wirkfeld denselben Grenzwert geben. Meistens wird ein Limitierungsverfahren mit Hilfe einer Matrixtransformation

$$\mathfrak{y}=A\,\mathfrak{x} \quad \equiv \quad y_n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\,x_k \qquad (n=0,1,\ldots)$$

erklärt. Die Folge $\mathfrak{x}$ heißt limitierbar durch das Matrixverfahren A, wenn alle Summen y_n existieren und $\lim y_n$ vorhanden ist. Es gibt jedoch auch Verfahren V, die anders definiert werden (s. unten); und es fragt sich dann, ob V durch ein Matrixverfahren A im obigen Sinn ersetzt werden kann, d.h. ob es ein Matrixverfahren A gibt, das mit V äquivalent ist.

Wir behandeln die Frage in zwei Fällen:

I. V ist das Verfahren $\overline{C}_1^{(q)}$ der starken C_1-Limitierbarkeit q-ter Ordnung. Für $0<q<1$ ist $\overline{C}_1^{(q)}$ keinem Matrixverfahren äquivalent. Für dieses Ergebnis von Kuttner [1946] geben wir einen kürzeren Beweis, indem wir die „Faktorfolgen" bei $\overline{C}_1^{(q)}$ betrachten. Der Beweis enthält den Kuttnerschen Grundgedanken in versteckter Form. Bei $q\geqq 1$ gibt es überraschenderweise Matrixverfahren, die mit $\overline{C}_1^{(q)}$ äquivalent sind. Der Beweis beruht auf Abschätzungen wie

$$\sum_{k=0}^{n}|x_k|\leq 4\sup_{\mathfrak{R}}\left|\sum_{k\in\mathfrak{R}}x_k\right|$$

($\mathfrak{R}$ durchläuft alle Teilmengen von $\{0,1,\ldots,n\}$).

II. V ist der Durchschnitt von Matrixverfahren $A^{(i)}$. Unter gewissen Voraussetzungen ist V keinem Matrixverfahren äquivalent. Der Beweis beruht auf dem Unterschied zwischen B- und F-Räumen. Das Ergebnis gestattet eine Anwendung auf den Durchschnitt von Cesáro-Verfahren.

Herrn W. Meyer-König bin ich für mehrere Ratschläge zu Dank verpflichtet.

Eine Zusammenstellung von Literatur über Inäquivalenzsätze findet man bei Meyer-König-Zeller [1953]. Zu nennen sind außerdem die Arbeiten von Mazur-Orlicz [1933], Erdös-Piranian [1950] und Wilansky [1952], in

denen der Unterschied zwischen zeilenfiniten und nichtzeilenfiniten Matrixverfahren behandelt wird.

2. Starke Limitierbarkeit.

Wir definieren die starke C_1-Limitierbarkeit q-ter Ordnung: Eine Folge $\{x_k\}$ heißt $\overline{C}_1^{(q)}$-limitierbar zum Werte x, wenn

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|x_k - x|^q \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

gilt.

Satz 1. Die starke C_1-Limitierbarkeit q-ter Ordnung ist für $0<q<1$ keinem Matrixverfahren äquivalent, jedoch für $q \geqq 1$ gewissen Matrixverfahren äquivalent.

Beweis. I. $0<q<1$. Es genügt der Nachweis, daß unter den Matrixverfahren A mit der Eigenschaft

(1) $$\text{Aus} \quad \overline{C}_1^{(q)} - \lim x_k = 0 \quad \text{folgt} \quad A - \lim x_k \text{ ex.}$$

kein mit $\overline{C}_1^{(q)}$ äquivalentes Verfahren ist. Dazu betrachten wir die Faktorfolgen von $\overline{C}_1^{(q)}$. Gilt $\overline{C}_1^{(q)}-\lim x_k = 0$, so ist für jede beschränkte Folge b_k (Faktorfolge) ebenfalls $\overline{C}_1^{(q)}-\lim x_k\, b_k = 0$, d.h. die Matrix $\{a_{nk}\, x_k\}$ limitiert jede beschränkte Folge b_k, insbesondere gilt

(2) $$\sup_k \sup_n |a_{nk}\, x_k| < \infty.$$

Jede Folge der Form

$$x_k = \alpha_k^{1/q}(k+1)^{1/q} \qquad (\sum |\alpha_k| < \infty)$$

wird von $\overline{C}_1^{(q)}$ zu Null limitiert. Ein solches x_k kann „fast" die Größenordnung $(k+1)^{1/q}$ erreichen. Aus (2) ergibt sich

$$\sup_n |a_{nk}| \leq \frac{\varrho}{(k+1)^{1/q}} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

mit einem geeigneten ϱ und somit

(3) $$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_n |a_{nk}| < \infty.$$

Aus (1) folgt natürlich

(4) $$\lim_{n\to\infty} a_{nk} \text{ ex.} \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

(3) und (4) ergeben zusammen, daß A jede beschränkte Folge zu Null limitiert, eine Eigenschaft, die bei $\overline{C}_1^{(q)}$ fehlt. Wir haben das gewünschte Ziel erreicht.

II. $q=1$. Wir stützen uns auf den

Hilfssatz. Die $n+1$ Zahlen $x_k (k = 0, 1, \ldots, n)$ mit $\sum_{k=0}^{n} |x_k| = 1$ seien gegeben, $\left[\frac{n+2}{2}\right] = m$ gesetzt. Dann gibt es eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\{0, 1, \ldots, n\}$

mit m Elementen, so daß

$$\left|\sum_{k\in\mathfrak{M}} x_k\right| \geqq \tfrac{1}{8}$$

ist.

Beim Beweis nehmen wir zunächst die x_k als reell an. Dann gilt

$$1 = \sum_{k\in\mathfrak{P}} x_k - \sum_{k\in\mathfrak{N}} x_k = \Theta - (\Theta - 1),$$

wo $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{N}$ die k mit $x_k \geqq 0$ bzw. $x_k < 0$ enthält. Wir dürfen (nach eventueller Multiplikation mit -1) annehmen, daß $\mathfrak{P}$ mindestens m Elemente, $\mathfrak{N}$ also höchstens m Elemente umfaßt. Den trivialen Fall $\mathfrak{N} = 0$ schließen wir aus. Für ein geeignetes $\mathfrak{M} \subseteqq \mathfrak{P}$ ($\mathfrak{M}$ wie oben) ist

$$\left|\sum_{k\in\mathfrak{M}} x_k\right| \geqq \frac{\Theta}{2},$$

für ein anderes geeignetes $\mathfrak{M} \supseteqq \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{M}$ wie oben)

$$\left|\sum_{k\in\mathfrak{M}} x_k\right| \geqq (1-\Theta) - \frac{\Theta}{2} = 1 - \frac{3}{2}\Theta.$$

Nun gilt

$$\operatorname*{Min}_{0\leq\Theta\leq 1} \operatorname{Max}\left[\frac{\Theta}{2}, 1-\frac{3}{2}\Theta\right] = \frac{1}{4}.$$

Eines der beiden genannten $\mathfrak{M}$ genügt somit der Ungleichung

$$\left|\sum_{k\in\mathfrak{M}} x_k\right| \geqq \tfrac{1}{4}.$$

Zulassung komplexer x_k verschlechtert die Konstante 1/4 höchstens um den Faktor 1/2, w. z. z. w.

Zurück zum Beweis des Satzes im Falle $q = 1$! Wir erhalten für jedes n endlich viele $\mathfrak{M}(n, p)$ der im Hilfssatz beschriebenen Art. Wir betrachten die Matrixtransformation

$$y_r = z_{np} = \frac{2}{n+1} \sum_{k\in\mathfrak{M}(n,p)} x_k$$

(wobei die y_r die lexikographisch angeordneten z_{np} sind). Die Transformation $\{x_k\} \to \{y_r\}$ ist permanent, d.h. führt konvergente Folgen in konvergente Folgen gleichen Grenzwerts über [wegen dieser Permanenz hatten wir die $\mathfrak{M}(n, p)$ sorgfältig ausgewählt]. Das der Transformation entsprechende Limitierungsverfahren limitiert wegen

$$|z_{np}| \leq \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |x_k| \leq 8 \sup_p |z_{np}|$$

(vgl. den Hilfssatz!) genau dieselben Folgen zu Null wie $\overline{C}_1^{(1)}$, woraus die Äquivalenz folgt.

III. $q > 1$. Der einfacheren Bezeichnung halber führen wir den Beweis nur für $q = 2$ durch. Wir betrachten $(n+1)$-gliedrige Vektoren $\mathfrak{x} = \{x_0, \ldots, x_n\}$,

$\mathfrak{h} = \{h_0, \ldots, h_n\}$ und setzen

$$||\mathfrak{x}|| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |x_k|^2},$$

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{h} = \sum_{k=0}^{n} x_k h_k.$$

Hilfssatz. Es gibt endlich viele Vektoren $\mathfrak{h}$ mit $||\mathfrak{h}|| \leq 3$ und $\sum h_k = \sqrt{n+1}$, so daß

$$\operatorname*{Max}_{\mathfrak{h}} |\mathfrak{x}\,\mathfrak{h}| \geq \tfrac{1}{2}\,||\mathfrak{x}||$$

für jedes $\mathfrak{x}$ gilt.

Beweis. Es ist

$$\operatorname*{Max}_{\mathfrak{f}} |\mathfrak{x}\,\mathfrak{f}| = 2 \cdot ||\mathfrak{x}|| \qquad (||\mathfrak{f}|| \leq 2,\ f = \sum f_k \geq 0).$$

Betrachte für $\mathfrak{x} \neq 0$ das $\mathfrak{f}$ mit

$$f_k = \tau \cdot \frac{2}{||\mathfrak{x}||}\,\bar{x}_k, \qquad \tau = \operatorname{sign} \sum_{k=0}^{n} \bar{x}_k.)$$

Wir approximieren nun diese $\mathfrak{f}$ durch Vektoren $\mathfrak{h}$ der beschriebenen Art. Zunächst setzen wir

$$g_k = f_k + \frac{\sqrt{n+1} - f}{n+1} \qquad (f = \sum f_k).$$

Dann gilt

$$\sum g_k = f + \sqrt{n+1} - f = \sqrt{n+1}$$

und

$$||\mathfrak{f} - \mathfrak{g}|| \leq (n+1)\left(\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right)^2 = 1, \quad \text{also} \quad ||\mathfrak{g}|| \leq 3,$$

da

$$0 \leq f = \sum f_k \leq \sum |f_k| \leq ||\mathfrak{f}|| \cdot \sqrt{n+1} = 2\sqrt{n+1}$$

ist.

Unter den $\mathfrak{g}$ können wir endlich viele Vektoren $\mathfrak{h}$ aussuchen, so daß jedes $\mathfrak{g}$ durch ein $\mathfrak{h}$ gemäß

$$||\mathfrak{g} - \mathfrak{h}|| \leq \tfrac{1}{2}$$

angenähert werden kann. Zu jedem $\mathfrak{f}$ ($\mathfrak{f}$ wie oben) gibt es dann ein $\mathfrak{h}$ mit

$$||\mathfrak{f} - \mathfrak{h}|| \leq ||\mathfrak{f} - \mathfrak{g}|| + ||\mathfrak{g} - \mathfrak{h}|| \leq 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2},$$

also

$$|\mathfrak{x}\,\mathfrak{h}| \geq |\mathfrak{x}\,\mathfrak{f}| - \tfrac{3}{2}\,||\mathfrak{x}||.$$

Es ergibt sich die Behauptung.

Dieselben Überlegungen wie in II. liefern nun den Beweis des Satzes für $q=2$; man beachte, daß sich die $\overline{C}_1^{(q)}$-Limitierbarkeit auch durch

$$(n+1)^{-\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k - x|^q \right)^{\frac{1}{q}} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

definieren läßt.

Satz 1 läßt sich verallgemeinern, indem man der starken Limitierbarkeit andere Matrizen statt der Matrix der arithmetischen Mittel zugrunde legt. Jedoch ergeben sich dabei gewisse Änderungen; so gilt z.B. für $0<q<1$ nicht immer ein Inäquivalenzsatz.

3. Der Durchschnitt von Matrixverfahren.

Wir schließen uns in Bezeichnung und Methode an Verf. [1951_2, insbesondere § 8] an. $\mathfrak{S}_N$ ist die Menge der Nullfolgen, $\mathfrak{S}_N A$ die Menge der Folgen, die von der Matrix A in Nullfolgen transformiert werden. $\mathfrak{S}_N A$ ist ein FK-Raum (s. l. c.) mit geeigneten Halbnormen p_j. A heißt perfekt, wenn die abbrechenden Folgen im FK-Raum $\mathfrak{S}_N A$ dicht liegen.

Satz 2. Voraussetzung. Die Matrixverfahren $A^{(i)}$ $(i=0, 1, \ldots)$ haben folgende Eigenschaften:

Die $A^{(i)}$ sind permanent und perfekt.

Es ist $\mathfrak{S}_N A^{(i)} \supseteq \mathfrak{S}_N A^{(i+1)}$ $(i=0, 1, \ldots)$.

Zu jeder Folge $\delta_k \nearrow \infty$ und jedem j gibt es eine Folge

$$\mathfrak{x} \notin \bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}, \qquad \mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A^{(j)}, \qquad x_k = O(\delta_k).$$

Behauptung. Es gibt keine Matrix A mit $\mathfrak{S}_N A = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{S}_N A^{(i)}$, d.h. kein Matrixverfahren A ist dem Durchschnitt der Verfahren $A^{(i)}$ äquivalent.

Beweis. Wir verwenden fast dieselbe Methode wie Verf. [1951_2, Satz 8.1] und fassen uns daher kurz. $\bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ ist ein FK-Raum mit den Halbnormen $p_{j\,i}$ der Räume $\mathfrak{S}_N A^{(i)}$. Wir dürfen $\mathfrak{S}_N A \supseteq \bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ annehmen. A bildet also $\bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ in $\mathfrak{S}_N$ ab, diese Abbildung ist stetig, somit gilt für die Halbnorm

$$q(\mathfrak{x}) = \sup_n \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{n\,k}\, x_k \right|$$

eine Ungleichung

$$q(\mathfrak{x}) \leq \varrho \sum_{j=0}^{l'} \sum_{i=0}^{l} p_{j\,i}(\mathfrak{x}) \qquad \left(\mathfrak{x} \in \bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}\right).$$

Die Funktionale

$$a_n(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n\,k}\, x_k$$

lassen sich daher stetig auf den Raum $\bigcap_{i=0}^{l} \mathfrak{S}_N A^{(i)} = \mathfrak{S}_N A^{(l)}$ fortsetzen, so daß

$$\sup_n |a_n(\mathfrak{x})| < \infty \qquad (\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A^{(l)})$$

gilt. Die Perfektheit von $A^{(l)}$ liefert hier sogar die Existenz von $\lim_n a_n(\mathfrak{x}) = 0$, m. a. W.: Das „natürlich erweiterte" Verfahren A ist so stark wie $A^{(l)}$. Es muß nur noch gezeigt werden, daß die Gleichungen

$$a_n(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\, x_k \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

auch für gewisse $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N A^{(l)}$, $\mathfrak{x} \notin \bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ gelten. Dazu dient uns die dritte Voraussetzung. Als stetige Linearformen in $\mathfrak{S}_N A^{(l)}$ sind die $a_m(\mathfrak{x})$ von der Gestalt (vgl. Verf. [1951_1, Satz 5.2])

$$a_m(\mathfrak{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(m) \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}^{(l)} x_k + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(m)\, x_k \qquad \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n(m)| < \infty\right).$$

Wegen der Permanenz von $A^{(l)}$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n(m)\, a_{nk}^{(l)}| < \infty \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_n(m)\, a_{nk}^{(l)}\, \delta_k| < \infty \qquad (m = 0, 1, \ldots),$$

wenn nur δ_k genügend langsam wächst. Für $x_k = O(\delta_k)$ darf man also oben die Summationsreihenfolge vertauschen und erhält

$$a_m(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(m)\, x_k$$

mit gewissen $\gamma_k(m)$. Einsetzen abbrechender Folgen x_k lehrt

$$\gamma_k(m) = a_{mk} \qquad (k, m = 0, 1, \ldots).$$

Wir nehmen nun das in der dritten Voraussetzung genannte $\mathfrak{x}$ für $j = l$ und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} a_n(\mathfrak{x}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}\, x_k = 0,$$

womit die Behauptung folgt.

Wir fügen einige Bemerkungen an, die die Lage bei „Durchschnittssätzen" und die Stellung von Satz 2 beleuchten.

I. Satz 2 gestattet den Nachweis, daß für jedes $a > 0$ der Durchschnitt der CESÁRO-Verfahren mit Ordnung $\alpha > a$ keinem Matrixverfahren äquivalent ist. (Darauf wird Verf. noch zusammen mit Herrn MEYER-KÖNIG zurückkommen.) Für $a \geqq 1$ kann dies nicht mit den Methoden des Verf. [1951_2, § 8] bewiesen werden, weil — mit den dortigen Bezeichnungen — die Menge der $\mathfrak{x}$, die in $\mathfrak{S}_N C^{(\alpha)}$ die Eigenschaft SAK bzw. AK besitzen, für alle $\alpha > 1$ bzw. $\alpha \geqq 1$ gleich ist.

II. Die $A^{(i)}$ seien permanente Matrixverfahren, $\mathfrak{S}_N A^{(i)} \supsetneq \mathfrak{S}_N A^{(i+1)}$. Dann kann $\bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)} = \mathfrak{S}_N$ sein. Sind jedoch die $A^{(i)}$ perfekt, so ist $\bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ sicher keinem zeilenfiniten Matrixverfahren äquivalent. Jedoch gibt es Beispiele perfekter $A^{(i)}$, für die $\bigcap \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ einem gewissen nichtzeilenfiniten Verfahren äquivalent ist.

Literatur.

Erdős, P., and G. Piranian: Convergence fields of row-finite and row-infinite Toeplitz transformations. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 397—401 (1950). — Kuttner, B.: Note on strong summability. J. London Math. Soc. **21**, 118—122 (1946). — Mazur, S., et W. Orlicz: Sur les méthodes linéaires de sommation. C. r. Acad. Sci. Paris **196**, 32—34 (1933). — Meyer-König, W., u. K. Zeller: Inäquivalenzsätze bei Limitierungsverfahren. Math. Z. **59**, 200—205 (1953). — Wilansky, A.: Convergence fields of row-finite and row-infinite reversible matrices. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 389—391 (1952). — Zeller, K.: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487 (1951_1). — Abschnittskonvergenz in *FK*-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1951_2).

Dep. Math., University of Pennsylvania, Philadelphia, USA.

(Eingegangen am 28. Juli 1953.)

Grotemeyer, K. P.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 278—289 (1953)

Gleitverbiegungen und eindeutige Bestimmtheit isometrischer, ebenrandiger Mützen.

Von

K. P. Grotemeyer.

Unter einer Mütze $\mathfrak{M}$ mit der geschlossenen Randkurve $R(\mathfrak{M})$ wollen wir ein Flächenstück mit folgenden Eigenschaften verstehen:

1. $\mathfrak{M}$ sei einfach zusammenhängend und dreimal stetig differenzierbar.
2. $R(\mathfrak{M})$ sei eben und zweimal stetig differenzierbar.
3. $\mathfrak{M}$ besitze positive Gausssche Krümmung.
4. Die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf die Randebene sei einwertig[1]).

Die Gesamtheit der Flächen mit diesen vier Eigenschaften sei mit M bezeichnet.

Nach H. Liebmann [*1*] nennt man diejenigen infinitesimalen Verbiegungen[2]) einer Fläche $\mathfrak{F}$ mit dem ebenen Rand $R(\mathfrak{F})$ Gleitverbiegungen, die den Rand $R(\mathfrak{F})$ eben lassen. Wenn nämlich $R(\mathfrak{F})$ und die daraus durch infinitesimale Verbiegung hervorgehende Kurve eben sind, so läßt es sich durch eine infinitesimale Bewegung stets erreichen, daß diese Randkurven in einer Ebene liegen, so daß $R(\mathfrak{F})$ bei den Gleitverbiegungen in dieser Ebene gleitet.

Im ersten Teil beweisen wir die infinitesimale Starrheit der Flächen der Klasse M gegenüber infinitesimalen Gleitverbiegungen[3]). Der Beweis ergibt sich sehr einfach mit Hilfe einer schon früher mit Vorteil verwendeten Integralformel [*11*]. Ferner zeigt sich, daß bei den Flächen der Klasse M die Starrheitsaussage gegenüber infinitesimalen Verbiegungen wesentlich von der

---

[1]) $\mathfrak{M}$ gestattet dann eine Darstellung der Form $z=f(x, y)$ mit eindeutigem $f(x, y)$.

[2]) Da man eine Mütze als echten Teil einer Eifläche auffassen kann, so folgt aus der infinitesimalen Verbiegbarkeit der punktierten Eiflächen die der Mützen.

[3]) Bei analytischen Flächen und analytischen Verbiegungen hat schon H. Liebmann auf diesen Satz hingewiesen. Vgl. [*1*]. Herr E. Rembs teilte mir hierzu freundlicherweise brieflich mit, daß man aus der (auf Flächen der Klasse M) gültigen Differentialgleichung für ζ:

$$z_{xx}\zeta_{yy} - 2z_{xy}\zeta_{xy} + z_{yy}\zeta_{xx} = 0$$

[ζ ist die z-Komponente des Deformationsvektors $\overline{\mathfrak{x}}$ der infinitesimalen Verbiegung der betrachteten Fläche $z=f(x, y)$ aus der Klasse M] unter Verwendung des Satzes von der Nichtexistenz von Extrema von ζ in inneren Punkten der vorliegenden Fläche, die infinitesimale Starrheit der Fläche der Klasse M gegenüber Gleitverbiegungen (unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) herleiten kann.

zweiten Variation der Randkurvenkrümmung abhängt. Ist nämlich das Integral über diese zweite Variation längs der Randkurve nicht positiv, so folgt daraus die Starrheit gegenüber den betreffenden infinitesimalen Verbiegungen.

Im zweiten Teil beweisen wir den Satz, daß zwei isometrische Flächen der Klasse M notwendig kongruent oder symmetrisch sind. Auch dieser Beweis verläuft recht einfach bei Benutzung einer vektoriellen Integralformel [*9*], [*10*], aus der sich bei früheren Untersuchungen [*11*] für Halbeiflächen (die natürlich in der Klasse M enthalten sind) ein Kongruenzsatz ergab, der in diesem Fall eine allgemeinere Aussage lieferte. (Die zur Halbeifläche isometrische Fläche braucht nicht notwendig eine Mütze zu sein; es soll nur der Rand eben sein.) Wegen weiterer Anwendungen dieser vektoriellen Integralformel sei auf [*12*] verwiesen. Die Flächen der Klasse M sind also eindeutig (d.h. bis auf Bewegungen oder Spiegelungen) durch die erste Fundamentalform bestimmt. Aus folgendem Grunde ist die Frage nach der eindeutigen Bestimmtheit der Flächen der Klasse M von besonderem Interesse. Pogorelov [*8*] bemerkt, daß Alexandrov folgendes gezeigt hat: Wenn in irgendeinem Gebiet G der Ebene eine Metrik mit positiver Gaussscher Krümmung gegeben ist, so hat jeder Punkt dieses Gebietes eine Umgebung, in der man die gegebene Metrik durch eine Fläche der Klasse M realisieren kann. Die Eindeutigkeit der Realisierung blieb aber ungeklärt[4]). Dieselbe wurde dann von Pogorelov [*8*] nachgewiesen (für glatte, durch ebene Kurven berandete Mützen). Allerdings sind diese Untersuchungen ziemlich kompliziert und recht umfangreich. Nach einem Satz von Rellich [*7*] kann man unter bestimmten Voraussetzungen folgern, daß es zu einer Mütze der Klasse M höchstens eine weitere isometrische Fläche der Klasse M geben kann, die nicht kongruent oder symmetrisch zur ersteren ist. Vgl. Anm. [10]).

Es sei noch darauf hingewiesen, daß es infinitesimale Gleitverbiegungen bei konvexen Flächen gibt, die die Eigenschaften 1 bis 3 der Mützen mit ebenem Rand haben, aber keine einwertige Projektion auf die Randebene besitzen. Liebmann [*1*] S. 39f. zeigte nämlich folgendes: Bringt man die Einheitskugel mit einer Ebene im Abstande $1/k$ ($k=2, 3, \ldots$ ganz $< \infty$) vom Mittelpunkt der Kugel zum Schnitt, so erhält man zwei Kalotten. Die größere der beiden (d.h. diejenige, die den Mittelpunkt im Inneren der kleinsten konvexen Hülle enthält), erfüllt offensichtlich die Eigenschaften 1 bis 3 der Flächenklasse M. Diese Kalotte gestattet infinitesimale Gleitverbiegungen. Die kleinere Kalotte ist natürlich bei infinitesimalen Gleitverbiegungen starr. (Für $k \to \infty$ gehen die Kalotten in die Halbkugeln über, die natürlich keine Gleitverbiegungen zulassen [*11*].) Man kann daraus, wie es auch Liebmann getan hat, weitere Folgerungen ziehen, wenn man an den bekannten Zusammenhang erinnert, der eine Beziehung zwischen der infinitesimalen Verbiegung und einem isometrischen Flächenpaar herstellt. Damit läßt sich die Existenz

[4]) Die genauen Voraussetzungen dieses Satzes, sowie die zugehörigen Literaturstellen sind in [*8*] nicht angegeben.

isometrischer ebenrandiger (sogar algebraischer) Paare von Flächenkalotten nachweisen, die nicht kongruent oder symmetrisch sind [1] S. 40 und [6] S. 276[5]).

Zum Abschluß der Arbeit sei noch auf eine einfache Verwandtschaft hingewiesen, die zwischen den verwendeten vektoriellen Integralformeln der infinitesimalen und der endlichen Flächenverbiegungen besteht. Auf die entsprechenden Zusammenhänge bei skalaren Integralformeln hat schon E. REMBS [5] hingewiesen. Wegen der benutzten Bezeichnungsweise sei auf [2], [9] und auf [11] verwiesen.

Wir denken uns die Mütze $\mathfrak{M}$ der Klasse M durch nach „innen" (d.h. ins Innere der konvexen Hülle von $\mathfrak{M}$) weisende, normierte Normalenvektoren ξ orientiert. Die mittlere Krümmung H von $\mathfrak{M}$ ist dann nicht negativ auf $\mathfrak{M}$[6]). $\mathfrak{x}(u^i)$ sei der Ortsvektor von $\mathfrak{M}$. Mit $\mathfrak{e}$ bezeichnen wir den Stellungsvektor der Randebene von $\mathfrak{M}$, der nach derjenigen Seite der Randebene weist, auf der die Mütze $\mathfrak{M}$ nicht liegt. Es gilt dann auf $\mathfrak{M}$:

$$(\mathfrak{e}\,\xi) \geq 0. \tag{1}$$

Ferner wählen wir den Umlaufssinn der Randkurve $R(\mathfrak{M})$ so, daß beim Blick von der jeweiligen Flächennormalenrichtung her [längs $R(\mathfrak{M})$] die Mütze $\mathfrak{M}$ stets zur linken Seite liegt[6a]). $\mathfrak{e}$ fällt dann mit dem Vektor der Binormalen von $R(\mathfrak{M})$ zusammen:

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{b} = \text{const}. \tag{2}$$

Bezeichnet man noch nach [2] und [9] mit $c(s)$ die geodätische Krümmung und mit $b(s) = -B_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k$ die Normalkrümmung längs $R(\mathfrak{M})$, so gilt für die zugehörige Hauptnormale $\mathfrak{n}$:

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{k}\ddot{\mathfrak{x}} = \frac{c}{k}\eta - \frac{b}{k}\xi; \qquad \eta = [\xi\,\dot{\mathfrak{x}}].$$

[$k(s) = \sqrt{c^2 + b^2}$ ist die Krümmung von $R(\mathfrak{M})$. Längs $R(\mathfrak{M})$ ist $k > 0$.]

$$\mathfrak{n} = \cos\varphi\,\eta + \sin\varphi\,\xi, \tag{3}$$

[5]) An dieser Stelle sei ein Hinweis gestattet auf eine Bemerkung von EULER in der Abhandlung: „Problema invenire duas superficies quarum alteram in alteram transformare licet, ita ut in utraque singula puncta homologa easdem inter se teneant distantias." (Opera postuma, t. I, Petropoli 1862, S. 494ff. und im ersten Band S. 10—13 der „Adversaria mathematica", dem Handbuch EULERS von 1766—1775.) Er schließt diese Abhandlung mit der Bemerkung, daß eine überall geschlossene körperliche Figur keine Veränderung zulasse. Solange also die Kugelfläche oder überhaupt eine geschlossene Fläche unversehrt sei, lasse sie keine Veränderungen zu. Indessen sei es klar, daß die Figur der Halbkugel sicher veränderlich sei; was für Veränderungen sie aber erleiden könne, das zu ermitteln sei eine schwierige Aufgabe. Dieselbe Behauptung, daß eine geschlossene Fläche als Ganzes sich nicht biegen läßt, ist bekanntlich 1812 von LAGRANGE und 1838 von MINDING ausgesprochen worden. Vgl. P. STÄCKEL: Bibliotheca mathematica, 3. F. 2, 123 (1900). Herr E. REMBS [6] hat kürzlich geschlossene, infinitesimal verbiegbare Flächen angegeben, die sogar analytisch sind.

[6]) Da auf $\mathfrak{M}$ stets $K > 0$ sein sollte, so können keine Flachpunkte auftreten. Es ist daher auf $\mathfrak{M}$ sogar $H > 0$.

[6a]) Unter dieser Voraussetzung gelten die in [9], [10] und [11] angegebenen Integralsätze, von denen hier zwei verwendet werden.

mit

$$\cos\varphi = \frac{c}{k}; \qquad \sin\varphi = -\frac{b}{k}. \tag{4}$$

Aus den Gln. (3) und (2) folgt wegen $\mathfrak{b} = [\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{n}]$

$$\mathfrak{b} = -\sin\varphi\,\eta + \cos\varphi\,\xi = \mathfrak{e}. \tag{5}$$

Es ist daher nach (1)

$$(\mathfrak{e}\,\xi) = \cos\varphi \geqq 0 \quad \text{auf} \quad R(\mathfrak{M}). \tag{6}$$

Da $K > 0$ und auch $H > 0$ auf $\mathfrak{M}$ ist, so ist der Tensor B_{ik} der zweiten Fundamentalform auf $\mathfrak{M}$ positiv definit, somit

$$b(s) = -B_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k < 0. \tag{7}$$

Nach (4) endlich:

$$\sin\varphi > 0. \tag{7_1}$$

Aus (6) und (7_1) erkennt man, daß man φ in dem Intervall

$$0 < \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

wählen darf.

Die infinitesimalen Gleitverbiegungen.

Die Gleitverbiegungen von $\mathfrak{M}$ können wir durch das Stationärsein der Torsion längs $R(\mathfrak{M})$ kennzeichnen:

$$\delta\varkappa = 0 \quad \text{vgl. [11]}. \tag{9}$$

Nach den Ableitungsgleichungen von FRENET gilt weiter

$$\dot{\mathfrak{b}} = -\varkappa\,\mathfrak{n} \tag{10}$$

und daher

$$\delta\dot{\mathfrak{b}} = -\delta\varkappa\,\mathfrak{n} - \varkappa\,\delta\mathfrak{n}. \tag{11}$$

Wegen $\varkappa = 0$ längs $R(\mathfrak{M})$, erhalten wir für die Gleitverbiegungen

$$\delta\dot{\mathfrak{b}} = 0 \quad \text{oder} \quad \delta\mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \text{const}. \tag{12}$$

Umgekehrt folgt auch aus $\delta\mathfrak{b} = \text{const}$ wieder $\delta\varkappa = 0$, wie aus (11) ersichtlich ist. Wir werden daher fortan (12) als kennzeichnende Eigenschaft der Gleitverbiegungen benutzen.

Jetzt soll noch $\delta\mathfrak{b}$ für allgemeine infinitesimale Verbiegungen berechnet werden. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{y}$ den Drehriß der vorliegenden Fläche $\mathfrak{x}$ so gilt:

$$\delta\dot{\mathfrak{x}} = [\mathfrak{y}\,\dot{\mathfrak{x}}] \quad \text{und auch} \quad \delta\xi = [\mathfrak{y}\,\xi]. \tag{13}$$

Für $\eta = [\xi\,\dot{\mathfrak{x}}]$ findet man daraus

$$\delta\eta = [\mathfrak{y}\,\eta]. \tag{14}$$

Aus der Gl. (5) können wir jetzt $\delta\mathfrak{b}$ berechnen:

$$\delta\mathfrak{b} = (-\cos\varphi\,\eta - \sin\varphi\,\xi)\,\delta\varphi - \sin\varphi\,\delta\eta + \cos\varphi\,\delta\xi$$

oder nach (13) und (14):

$$\delta\mathfrak{b} = -\mathfrak{n}\,\delta\varphi + [\mathfrak{y}\,\mathfrak{b}]. \tag{15}$$

Speziell für Gleitverbiegungen gilt daher

$$[\mathfrak{y}\,\mathfrak{b}] = \mathfrak{c} + \mathfrak{n}\,\delta\varphi. \tag{16}$$

Umgekehrt folgt natürlich aus dem Bestehen von (16) auch die Gültigkeit von (12) und damit auch von (9). Das gewonnene Ergebnis läßt sich so formulieren:

Wenn eine Fläche $\mathfrak{F}$ mit dem ebenen Rand $R(\mathfrak{F})$ infinitesimale Gleitverbiegungen $[\delta\varkappa = 0$ längs $R(\mathfrak{F})]$ gestatten soll, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß für den zugehörigen Drehriß $\mathfrak{y}$ längs $R(\mathfrak{F})$ gilt:

$$[\mathfrak{y}\,\mathfrak{b}] = \mathfrak{c} + \mathfrak{n}\,\delta\varphi^{7}).$$

Darin ist $\mathfrak{b} = \text{const}$[8]) der Einheitsvektor der Binormalen von $R(\mathfrak{F})$. Der konstante Vektor $\mathfrak{c}$ läßt sich durch eine geeignete infinitesimale Bewegung zum Nullvektor machen.

Bevor wir die Frage nach den Starrheitsaussagen gegenüber Gleitverbiegungen stellen, sollen noch zwei, für allgemeine infinitesimale Verbiegungen gültige Beziehungen abgeleitet werden, die δb in Verbindung mit δk bzw. $\delta\varphi$ setzen.

Für alle infinitesimalen Verbiegungen ist die geodätische Krümmung c stationär:

$$\delta c = 0 \quad [\textit{11}, \text{Gl. } (27)]. \tag{17}$$

Wegen $k^2 = c^2 + b^2$ ist daher $k\cdot\delta k = b\,\delta b$ und nach (4) gilt somit

$$\sin\varphi\cdot\delta b = -\delta k. \tag{18}$$

Um noch δb mit $\delta\varphi$ zu verbinden, betrachten wir nach (4)

$$\dot{\delta} b = -\delta(k\sin\varphi) = -\delta k\sin\varphi - k\cos\varphi\cdot\delta\varphi \tag{19_1}$$

und

$$\delta c = \delta(k\cos\varphi) = \delta k\cos\varphi - k\sin\varphi\cdot\delta\varphi = 0.$$

[7]) Daraus folgt auch, daß man durch eine geeignete infinitesimale Bewegung mit dem Drehriß $\mathfrak{a} = \text{const}$ den festen Vektor $\mathfrak{c}$ zum Nullvektor machen kann. Woraus wegen $\delta\mathfrak{b} = 0$ dann das „Stationärsein" der Randebene folgt. Bei einer infinitesimalen Bewegung ist $\delta\varphi = 0$. Wir wählen daher den Vektor $\mathfrak{a} = \text{const}$ so, daß $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = -\mathfrak{c}$ wird. Betrachtet man statt den Gleitverbiegungen mit dem Drehriß $\mathfrak{y}$ diejenigen, die einen Drehriß der Form $\mathfrak{y}+\mathfrak{a}$ haben, dann ist in verständlicher Schreibweise:

$$\delta\mathfrak{b} = \delta_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} + \delta_{\mathfrak{y}}\mathfrak{b} = [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] + \mathfrak{c} = 0.$$

[8]) $R(\mathfrak{F})$ soll keine Gerade sein.

Daher ist

$$\delta k \cos\varphi = k \sin\varphi \cdot \delta\varphi. \tag{19_2}$$

Nach der Multiplikation von (19_1) mit $\cos\varphi$ folgt aus (19_2) die gesuchte Relation zwischen δb und $\delta\varphi$:

$$\cos\varphi \cdot \delta b = -k\,\delta\varphi. \tag{20}$$

Die Starrheit ebenrandiger Mützen gegenüber Gleitverbiegungen.

Satz 1. *Eine Fläche der Klasse M ist starr gegenüber allen infinitesimalen Gleitverbiegungen.*

Beweis. Wir wenden auf die vorliegende Mütze der Klasse M den vektoriellen Integralsatz

$$\iint ||\alpha_i^k|| \,\xi\, do = \tfrac{1}{2} \oint [\mathfrak{y}\,\dot{\mathfrak{y}}]\, ds \tag{21}$$

an. (Wegen der Bezeichnung vgl. man hierzu [*11*] S. 53—55.) Da auf $\mathfrak{M}$ die Gausssche Krümmung positiv ist, so gilt auf $\mathfrak{M}$:

$$||\alpha_i^k|| \leq 0, \tag{22}$$

und aus dem Verschwinden dieser Determinante folgt $\alpha_i^k = 0$. Da

$$\mathfrak{y}_i = \alpha_i^k \mathfrak{x}_k$$

ist ($\mathfrak{y}$ ist der Drehriß), so ergibt sich daraus die Starrheitsaussage $\mathfrak{y} = \text{const}$.

Multiplizieren wir nun (21) mit dem Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ der Randebene der Mütze, so gilt dann

$$\iint ||\alpha_i^k|| \,(\mathfrak{e}\,\xi)\, do = \tfrac{1}{2} \oint (\mathfrak{e}\,\mathfrak{y}\,\dot{\mathfrak{y}})\, ds. \tag{21'}$$

Nach (16) ist, wenn wir nunmehr nur noch Gleitverbiegungen betrachten:

$$[\mathfrak{e}\,\mathfrak{y}] = -\mathfrak{c} - \mathfrak{n}\,\delta\varphi.$$

Da nach [*11*] Gl. (24) für $\dot{\mathfrak{y}}$ gilt:

$$\dot{\mathfrak{y}} = \delta a\,\dot{\mathfrak{x}} + \delta b\,\eta, \tag{23}$$

so ist bei Beachtung von (3):

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{y}\,\dot{\mathfrak{y}}) = -(\mathfrak{c}\,\dot{\mathfrak{y}}) - \delta b \cos\varphi \cdot \delta\varphi$$

oder unter Benutzung von (20):

$$(\mathfrak{e}\,\mathfrak{y}\,\dot{\mathfrak{y}}) = -(\mathfrak{c}\,\dot{\mathfrak{y}}) + k(\delta\varphi)^2. \tag{24}$$

Wegen $\oint \dot{\mathfrak{y}}\, ds = 0$ nimmt daher (21') die Form an:

$$\iint ||\alpha_i^k|| \,(\mathfrak{e}\,\xi)\, do = \tfrac{1}{2} \oint k(\delta\varphi)^2\, ds. \tag{25}$$

Nach (1) und (22) ist aber die linke Seite von (25) nicht positiv, während das Randintegral rechts nicht negativ ist. Beide Seiten von (25) müssen daher

verschwinden. Aus dem Verschwinden des Oberflächenintegrals folgt aber wieder wegen (1) und (22) $||\alpha_i^k|| = 0$, d.h. die Starrheitsaussage der Flächen der Klasse M gegenüber Gleitverbiegungen.

Der vektorielle Integralsatz bei infinitesimalen Verbiegungen von Flächen der Klasse M.

Wir betrachten jetzt beliebige infinitesimale Verbiegungen von Flächen der Klasse M. Formen wir zunächst den Integralsatz (21) etwas um. Wegen $\dot{\mathfrak{y}} = \delta a\, \dot{\mathfrak{x}} + \delta b\, \eta$ gilt:

$$[\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}] = \delta a\, [\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{x}}] + \delta b\, [\mathfrak{y}\, \eta]$$

und nach (13) und (14) wird daher

$$[\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}] = \delta a\, \delta \dot{\mathfrak{x}} + \delta b\, \delta \eta$$

oder auch

$$[\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}] = \delta \{\delta a\, \dot{\mathfrak{x}} + \delta b\, \eta\} - \{\delta^2 a\, \dot{\mathfrak{x}} + \delta^2 b\, \eta\}\ ^{9})$$

$$[\mathfrak{y}\, \dot{\mathfrak{y}}] = \delta\, \dot{\mathfrak{y}} - \{\delta^2 a\, \dot{\mathfrak{x}} + \delta^2 b\, \eta\}.$$

Weiter ist

$$\oint \delta\, \dot{\mathfrak{y}}\, ds = \oint (\delta \mathfrak{y})^{\cdot}\, ds = 0.$$

Wir können daher die Formel (21) in der Form

$$\iint ||\alpha_i^k||\, \xi\, do = -\tfrac{1}{2} \cdot \oint \{\delta^2 a\, \dot{\mathfrak{x}} + \delta^2 b\, \eta\}\, ds \tag{26}$$

schreiben. Nach der Multiplikation mit dem Vektor $\mathfrak{e}$ folgt wegen $(\mathfrak{e}\, \dot{\mathfrak{x}}) = 0$ und $(\mathfrak{e}\, \eta) = -\sin\varphi$ [vgl. (5)]:

$$\iint ||\alpha_i^k||\, \xi\, do = \tfrac{1}{2} \oint \delta^2 b \sin\varphi\, ds.$$

Nun ist aber

$$\delta(\delta b \sin\varphi) = \delta^2 b \sin\varphi + \delta b \cos\varphi\, \delta\varphi.$$

Nach (18) und (20) wird daraus:

$$-\delta^2 k = \delta^2 b \sin\varphi - k(\delta\varphi)^2.$$

Es gilt daher für jede Fläche der Klasse M die Formel:

$$\iint ||\alpha_i^k||\, (\mathfrak{e}\, \xi)\, do = \tfrac{1}{2} \oint k(\delta\varphi)^2\, ds - \tfrac{1}{2} \oint \delta^2 k\, ds. \tag{27}$$

Diese Relation zeigt, in welcher Weise die zweite Variation der Randkurvenkrümmung $\delta^2 k$ die Starrheitsaussage beeinflußt. Aus (27) kann man ohne Mühe den Satz ablesen:

Satz 2. *Jede Fläche der Klasse M ist starr gegenüber allen infinitesimalen Verbiegungen, für die das Integral über die Randkurve*

$$\oint \delta^2 k\, ds \leqq 0$$

ist.

---

[9]) Unter δ^2 verstehen wir die „zweite Variation" beim infinitesimalen Verbiegungsprozeß. Für Satz 1 wird die Existenz der zweiten Variation nicht vorausgesetzt.

Die eindeutige Bestimmtheit ebenrandiger konvexer Mützen durch die erste Fundamentalform[10]).

Satz 3. *Zwei isometrische Flächen der Klasse M sind notwendig kongruent oder symmetrisch.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ die Ortsvektoren der beiden ebenrandigen isometrischen Mützen der Klasse M. Beide Flächen seien auf dasselbe, die Isometrie vermittelnde Parametersystem bezogen. Die Größen der Fläche $\mathfrak{x}^*$, die von den entsprechenden Größen der Fläche $\mathfrak{x}$ verschieden sind, sollen durch einen Stern gekennzeichnet werden. Wir wenden nun den Integralsatz aus [*10*], Gl. (2):

$$\iint \frac{||A_{ik}||}{g}\,\xi\,do = \oint \{(a-a^*)\,\dot{\mathfrak{x}} + (b-b^*)\,\eta\}\,ds \tag{28}$$

auf die vorliegenden Flächen an. Multiplizieren wir wieder diesen Integralsatz mit dem Stellungsvektor $\mathfrak{e}$ der Randebene von $\mathfrak{x}$, so folgt wegen $(\mathfrak{e}\,\eta) = -\sin\varphi$; $(\mathfrak{e}\,\dot{\mathfrak{x}}) = 0$:

$$\iint \frac{||A_{ik}||}{g}\,(\xi\,\mathfrak{e})\,do = -\oint (b-b^*)\sin\varphi\,ds. \tag{29}$$

Darin ist $A_{ik} = B_{ik} - B^*_{ik}$ die Differenz der zweiten Fundamentalformen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$. Für die Determinante $||A_{ik}||$ gilt

$$||A_{ik}|| \leqq 0. \tag{30}$$

Aus $||A_{ik}|| = 0$ folgt $A_{ik} = 0$ d.h. die Kongruenz oder Symmetrie der beiden Flächen.

Da hier beide Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ völlig gleichberechtigt sind, so gilt auch der Integralsatz, der aus (29) entsteht, wenn man dort die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ miteinander vertauscht:

$$\iint \frac{||A_{ik}||}{g}\,(\mathfrak{e}^*\,\xi^*)\,do = -\oint (b^*-b)\sin\varphi^*\,ds. \tag{29*}$$

[Für $(\mathfrak{e}^*\xi^*)$ und φ^* gelten natürlich, da $\mathfrak{x}^*$ zur Klasse M gehört, die (1) und (8) entsprechenden Ungleichungen.]

Addieren wir jetzt die beiden Integralsätze (29) und (29*) so erhalten wir den in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ symmetrischen Integralsatz:

$$\iint \frac{||A_{ik}||}{g}\,\{(\mathfrak{e}\,\xi) + (\mathfrak{e}^*\,\xi^*)\}\,do = -\oint (b-b^*)\,(\sin\varphi - \sin\varphi^*)\,ds. \tag{31}$$

---

[10]) Nach einem Satz von Herrn F. Rellich [7] kann es höchstens zwei Mützen der Klasse M geben (bis auf orthogonale Transformationen), die isometrisch sind, und wobei die Größen der ersten Fundamentalform $g_{ik}(u^l)$ in $u^{1^2}+u^{2^2}<1$ definiert und dort zweimal stetig differenzierbar sind. $u^{1^2}+u^{2^2}=1$ ist das Bild der Randkurve der Mütze in der Parameterebene. Die in [7] angegebene Bedingung $\partial(x,y)/\partial(u^1,u^2) \neq 0$ in $u^{1^2}+u^{2^2}<1$ ist äquivalent mit der Existenz eines festen Vektors $\mathfrak{a}$, so daß $(\mathfrak{a}\,\xi)\neq 0$ ist in allen inneren Flächenpunkten. Auf Flächen der Klasse M ist diese Bedingung aber erfüllt, wenn wir für $\mathfrak{a}$ den Vektor $\mathfrak{e}$ wählen; denn nur in den Randpunkten der Fläche kann $(\mathfrak{e}\,\xi)=0$ sein.

Schreiben wir noch zur Abkürzung

$$(32) \qquad L \equiv (b - b^*)(\sin\varphi - \sin\varphi^*) = 2(b - b^*)\cos\frac{\varphi+\varphi^*}{2}\cdot\sin\frac{\varphi-\varphi^*}{2},$$

so nimmt jetzt der Integralsatz (31) die Form an:

$$(33) \qquad \iint \frac{\|A_{ik}\|}{g}\{(e\,\xi) + (e^*\,\xi^*)\}\,do = -\oint L\,ds.$$

Um für den Integranden L des Randintegrals eine andere Darstellung zu finden, benutzen wir, daß längs den Randkurven beider Flächen die geodätischen Krümmungen übereinstimmen. Nach (4) ist dann

$$(34) \qquad c(s) = k\cos\varphi = k^*\cos\varphi^*.$$

Wird nun (34) mit $\sin\varphi\sin\varphi^*$ multipliziert, dann folgt nach (4_2):

$$b\cos\varphi\sin\varphi^* = b^*\cos\varphi^*\sin\varphi.$$

Subtrahiert man davon $b\cos\varphi^*\sin\varphi$, so erhält man

$$(35) \qquad b\sin(\varphi - \varphi^*) = (b - b^*)\cos\varphi^*\sin\varphi.$$

Durch Vertauschen der mit einem Stern versehenen Größen mit denen ohne Stern erhält man entsprechend:

$$(35^*) \qquad b^*\sin(\varphi - \varphi^*) = (b - b^*)\cos\varphi\sin\varphi^*.$$

Addiert man nun (35) und (35*), so ist

$$(36) \qquad (b + b^*)\sin(\varphi - \varphi^*) = (b - b^*)\sin(\varphi + \varphi^*)$$

und nach (32):

$$(37) \qquad \frac{1}{2}L = (b + b^*)\frac{\cos\frac{\varphi-\varphi^*}{2}\cdot\sin^2\frac{\varphi-\varphi^*}{2}}{\sin\frac{\varphi+\varphi^*}{2}}.$$

Nach (8), d.h. wegen

$$0 < \varphi,\ \varphi^* \leq \frac{\pi}{2}$$

gilt aber

$$0 < \frac{\varphi+\varphi^*}{2} \leq \frac{\pi}{2}; \qquad -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\varphi-\varphi^*}{2} \leq \frac{\pi}{4}$$

daher ist

$$\sin\frac{\varphi+\varphi^*}{2} > 0 \quad \text{und} \quad \cos\frac{\varphi-\varphi^*}{2} > 0.$$

Wegen (7) ist weiter

$$b + b^* < 0.$$

Daher gilt also

$$(38) \qquad L \leq 0.$$

Nach (33) muß daher

$$\iint \frac{||A_{ik}||}{g} \{(\mathfrak{e}\,\xi) + (\mathfrak{e}^*\,\xi^*)\}\, do \geqq 0$$

sein. Wegen $||A_{ik}|| \leqq 0$ und $(\mathfrak{e}\,\xi) \geqq 0$; $(\mathfrak{e}^*\,\xi^*) \geqq 0$ folgt daraus aber das Verschwinden des Integrals und wiederum erkennt man dann das Verschwinden von A_{ik}. Es sind daher die beiden isometrischen Flächen der Klasse M kongruent oder symmetrisch. Damit ist der genannte Satz bewiesen.

Ohne Mühe läßt sich der Satz 3 jetzt erweitern unter Benutzung des Hilfssatzes:

Es sei $\mathfrak{M}$ eine Mütze der Klasse M. $\overline{\mathfrak{M}}$ sei eine zu $\mathfrak{M}$ isometrische Fläche, die dreimal stetig differenzierbar ist, und die von einer geschlossenen, ebenen, zweimal stetig differenzierbaren Kurve $R(\overline{\mathfrak{M}})$ berandet wird. Dann gehört $\overline{\mathfrak{M}}$ ebenfalls zur Klasse M.

Bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{e}}$ die feste Binormale von $R(\overline{\mathfrak{M}})$. Es genügt dann zu zeigen, daß auf $\overline{\mathfrak{M}}$ gilt: $(\bar{\mathfrak{e}}\,\bar{\xi}) \geqq 0$; denn dann sind die Forderungen 1., 2., 3. für die Flächen der Klasse M erfüllt. Nehmen wir etwa an, $(\bar{\mathfrak{e}}\,\bar{\xi})$ wechsle auf $\overline{\mathfrak{M}}$ das Vorzeichen. Da auf $\overline{\mathfrak{M}}$ $K > 0$ und ${}^{(\overline{\mathfrak{M}})}\iint K\, do \leqq 2\pi$ ist, so muß dann $(\bar{\mathfrak{e}}\,\bar{\xi}) = \cos\bar{\varphi}$ auch auf dem Rande $R(\overline{\mathfrak{M}})$ das Vorzeichen wechseln. (Das läßt sich etwa aus dem sphärischen Normalenbild erkennen.) Wegen der isometrischen Abbildung gilt nun nach (4) längs der Randkurve

$$c = \bar{k}\cos\bar{\varphi} = k\cos\varphi \geqq 0.$$

Nun ist $\bar{k} \geqq 0$ und daher auch $\cos\bar{\varphi} \geqq 0$. Die Annahme, $(\bar{\mathfrak{e}}\,\bar{\xi})$ wechsle auf $\overline{\mathfrak{M}}$ das Vorzeichen, führt somit auf einen Widerspruch. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Eine Fläche der Klasse M gestattet daher keine „endlichen Gleitverbiegungen".

Die Verwandtschaft zwischen dem vektoriellen Integralsatz der infinitesimalen und der endlichen Flächenverbiegung.

Setzen wir zunächst den Wert des Integranden des Randintegrals nach (23) in den Integralsatz (21′) ein, so folgt:

$$2\iint ||\alpha_i^k||\,(\mathfrak{e}\,\xi)\, do = -\oint \delta b \cos\varphi\, \delta\varphi\, ds$$

oder

$$2\iint ||\alpha_i^k||\,(\mathfrak{e}\,\xi)\, do = -\oint \delta b\, \delta(\sin\varphi)\, ds. \tag{21″}$$

Schreiben wir auch noch den Integralsatz (31) dazu:

$$\iint \frac{||A_{ik}||}{g} \{(\mathfrak{e}\,\xi) + (\mathfrak{e}^*\,\xi^*)\}\, do = -\oint (b - b^*)(\sin\varphi - \sin\varphi^*)\, ds. \tag{31}$$

Hieraus erkennt man (im Fall der Flächen der Klasse M), die große Verwandtschaft beider Integralformeln. Wo in (21″) die „Variationen" stehen,

treten in (31) „endliche" Differenzen der entsprechenden Größen auf. Die gleiche Analogie läßt sich auch aus den Werten der Integranden der Randintegrale nach (25) und (37) ablesen.

Wir wollen jetzt die allgemein gültigen Zusammenhänge zwischen den beiden vektoriellen Integralformeln betrachten. In [*11*, Gl. (20)] ist gezeigt worden, daß für die zweite Fundamentalform der Fläche $\mathfrak{x}^*$, die aus $\mathfrak{x}$ durch eine infinitesimale Verbiegung hervorgeht, folgende Darstellung gilt:

$$B^*_{ik} = B_{ik} + t\,\varepsilon_{lk}\alpha_i^{\ l} + t^2(\ldots). \tag{39}$$ [11])

Also ist

$$A_{ik} = -\,t\,\varepsilon_{lk}\alpha_i^{\ l} - t^2(\ldots), \tag{40}$$

ferner

$$\underset{\sim}{A}^{ik} = \varepsilon^{i\alpha}\varepsilon^{k\beta}A_{\alpha\beta} = -\,t\,\varepsilon^{is}\alpha_s^{\ k} - t^2(\ldots). \tag{40'}$$

Weiter erhält man daher

$$2\frac{\|A_{ik}\|}{g} = \underset{\sim}{A}^{ik}A_{ik} = t^2\,\varepsilon_{lk}\varepsilon^{is}\alpha_i^{\ l}\alpha_s^{\ k} + t^3(\ldots). \tag{41}$$

Nun ist $2\|\alpha_i^{\ k}\| = \varepsilon_{lk}\varepsilon^{is}\alpha_i^{\ l}\alpha_s^{\ k}$ und daher

$$\frac{\|A_{ik}\|}{g} = t^2\|\alpha_i^{\ k}\| + t^3(\ldots). \tag{42}$$

Schreiben wir jetzt noch die Entwicklungen von a^* und b^* auf:

$$\begin{cases} a^* = a + t\,\delta a + \frac{t^2}{2}\,\delta^2 a + \cdots, \\ b^* = b + t\,\delta b + \frac{t^2}{2}\,\delta^2 b + \cdots. \end{cases} \tag{43}$$

Setzt man diese Darstellungen in den vektoriellen Integralsatz

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{g}\,\xi\,do = \oint \{(a - a^*)\,\dot{\mathfrak{x}} + (b - b^*)\,\eta\}\,ds \tag{28}$$ [12])

ein, und vergleicht man die Glieder in t^2, so folgt

$$\iint \|\alpha_i^{\ k}\|\,\xi\,do = -\tfrac{1}{2}\oint \{\delta^2 a\,\dot{\mathfrak{x}} + \delta^2 b\,\eta\}\,ds.$$

Dieses ist aber gerade die Form (26) des vektoriellen Integralsatzes der infinitesimalen Verbiegung.

Auf die Zusammenhänge zwischen den Integralformeln mit skalaren Integranden der infinitesimalen und endlichen Verbiegung hat zwar HERGLOTZ [Abh. aus dem Math. Sem. d. Univ. Hamb. 15, (1947) S. 102ff.] hingewiesen, aber erst Herr E. REMBS [*5*] hat diese Verwandtschaft genauer untersucht.

---

[11]) Der Tensor $\varepsilon_{lk}\alpha_i^{\ l}$ ist wegen $\alpha_l^{\ l} = 0$ symmetrisch. ε_{ik} ist der „Diskriminantentensor". Vgl. [*9*] S. 254, Gl. (3), (4), (5).

[12]) Das im Randintegral auftretende Glied, welches in t linear ist: $\oint (\delta a\,\dot{\mathfrak{x}} + \delta b\,\eta)\,ds$ verschwindet, was wegen $\dot{\mathfrak{y}} = \delta a\,\dot{\mathfrak{x}} + \delta b\,\eta$ nichts Neues aussagt.

Literatur.

[1] Liebmann, H.: Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen Sitzgsber. bayer. Akad. Wiss., Math.-physik. Kl. **1920**, 21—48. — [2] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 4. Aufl., Bd. I. Berlin 1945. — [3] Rembs, E.: Die infinitesimalen Verbiegungen der Kugel. J. reine angew. Math. **173**, 160—163 (1935). — [4] Rembs, E.: Über Gleitverbiegungen. Math. Ann. **111**, 587—595 (1935). — [5] Rembs, E.: Integralformeln der Verbiegungstheorie. Math. Nachr. **7**, 61—64 (1952). — [6] Rembs, E.: Zur Verbiegung der Flächen im Großen. Math. Z. **56**, 271—279 (1952). — [7] Rellich, F.: Zur ersten Randwertaufgabe bei Monge-Ampereschen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus; differentialgeometrische Anwendungen. Math. Ann. **107**, 505—513 (1933). — [8] Pogorelov, A. V.: Eindeutige Bestimmtheit konvexer Flächen. [Russisch.] Trudy mat. Stekl. Inst., Moskau **29** (1949). — [9] Grotemeyer, K. P.: Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform. Math. Z. **55**, 253—268 (1952). — [10] Grotemeyer, K. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen mit Rand. Math. Z. **58**, 41—45 (1953). — [11] Grotemeyer, K. P.: Zur infinitesimalen und endlichen Verbiegung von Halbeiflächen. Arch. d. Math. **4**, 52—60 (1953). — [12] Grotemeyer, K. P.: Über die Verbiegung konvexer Flächen mit einer Randkurve, die Eigenschattengrenze ist. Math. Z. **58**, 272—280 (1953).

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 24. Juli 1953.)

PINL, M.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 290—295 (1953)

B-Kugelbilder reeller Minimalflächen in R_4.

Von
M. PINL.

In der Arbeit „Sulla geometria differenziale delle superficie S_2 nello spazio euclideo S_4"[1]) gewinnt W. BLASCHKE für die zweidimensionalen Flächen S_2 des euklidischen vierdimensionalen Raumes S_4 $(=R_4)$ Paare sphärischer Abbildungen, die wir im folgenden B-Kugelbilder nennen wollen. Bekanntlich ist die GAUSSsche sphärische Abbildung der Minimalflächen des R_3 konform. Wir wollen zeigen, daß dies auch für die Kugelbilder der Minimalflächen des R_4 zutrifft, wenn man B-Kugelbilder zugrunde legt.

§ 1. B-Kugelbilder allgemeiner Flächen.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{r}(u_1, u_2)$ den Ortsvektor einer allgemeinen reellen Fläche im vierdimensionalen euklidischen Raum und mit $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ die Vektoren eines normierten orthogonalisierten Vierbeins im Endpunkt von $\mathfrak{r}$. Dann gilt (nach E. CARTAN):

$$d\mathfrak{a}_i = \sum_{k=0}^{3} \mathfrak{a}_k \tau_{ik}, \quad \tau_{ik} + \tau_{ki} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

Wir nehmen überdies an, daß die Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ die Fläche im Punkt $\mathfrak{r}$ berühren. Sind dann a_{ik} die (reellen) Komponenten der vier Vektoren $\mathfrak{a}_i$ in einem kartesischen Koordinatensystem und e_0, e_1, e_2, e_3 Basiselemente eines vierdimensionalen Vektorraumes mit der Multiplikationstabelle

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	$+1$	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

,

so entsprechen den Vektoren $\mathfrak{a}_i$ die Quaternionen:

$$\boldsymbol{a}_i = a_{i0} + a_{i1} e_1 + a_{i2} e_2 + a_{i3} e_3, \quad a_{i0} e_0 = a_{i0}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

und ihre konjugierten

$$\bar{\boldsymbol{a}}_i = a_{i0} - a_{i1} e_1 - a_{i2} e_2 - a_{i3} e_3, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Die „Skalarteile" der Quaternionenprodukte $\boldsymbol{a}_\alpha \bar{\boldsymbol{a}}_0$ und $\bar{\boldsymbol{a}}_0 \boldsymbol{a}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ verschwinden, da die zugeordneten Vektoren orthogonal sind. Man erhält die

[1]) Vgl. BLASCHKE, W.: Sulla geometria differenziale delle superficie S_2 nello spazio euclideo S_4: Ann. di Mat., Ser. IV **28**, 205—209 (1949).

„vektoriellen" Quaternionenprodukte

$$(2) \qquad \boldsymbol{a}_\alpha \bar{\boldsymbol{a}}_0 = \boldsymbol{r}_\alpha, \quad \bar{\boldsymbol{a}}_0 \boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Unter diesen sind $\boldsymbol{r}_3$ und $\boldsymbol{r}'_3$ ausgezeichnet, nämlich invariant gegenüber

$$\mathfrak{a}_1^* = \mathfrak{a}_1 \cos\varphi - \mathfrak{a}_2 \sin\varphi, \quad \mathfrak{a}_2^* = \mathfrak{a}_1 \sin\varphi + \mathfrak{a}_2 \cos\varphi.$$

Allgemein gilt[2])

$$(3) \qquad \boldsymbol{r}_\alpha + \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha + \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha = 0, \quad \boldsymbol{r}_\alpha \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha = 1, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Deuten wir jetzt die „vektoriellen" Quaternionen $\boldsymbol{r}_3$ und $\boldsymbol{r}'_3$ als Einheitsvektoren $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}'_3$ eines dreidimensionalen euklidischen Raumes, so bestimmen $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}'_3$ das Paar der „B-Kugelbilder" in R_3 der Fläche $\mathfrak{r}$ in R_4. Für spätere Zwecke notieren wir noch die Relationen

$$(4) \quad d\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{r}_1(\tau_{31} + \tau_{02}) - \boldsymbol{r}_2(\tau_{23} + \tau_{01}), \quad d\boldsymbol{r}'_3 = \boldsymbol{r}'_1(\tau_{31} - \tau_{02}) - \boldsymbol{r}'_2(\tau_{23} - \tau_{01}),$$

$$(5) \quad d\bar{\boldsymbol{r}}_3 = \bar{\boldsymbol{r}}_1(\tau_{31} + \tau_{02}) - \bar{\boldsymbol{r}}_2(\tau_{23} + \tau_{01}), \quad d\bar{\boldsymbol{r}}'_3 = \bar{\boldsymbol{r}}'_1(\tau_{31} - \tau_{02}) - \bar{\boldsymbol{r}}'_2(\tau_{23} - \tau_{01}),$$

die sich (als Spezialfall $\alpha = 3$) aus (2) und (1) durch Differentiation ergeben[3]).

§ 2. B-Kugelbilder reeller Minimalflächen.

$\mathfrak{y}(u)$ sei eine isotrope Kurve im komplex erweiterten R_4, $\Re\,\mathfrak{y}(u) = \mathfrak{r}(u_1, u_2)$ der Realteil der analytischen Vektorfunktion $\mathfrak{y}(u)$, $u = u_1 + i\,u_2$. Wir setzen

$$\mathfrak{y}(u) = \mathfrak{r}(u_1, u_2) + i\,\mathfrak{s}(u_1, u_2), \qquad i = \sqrt{-1}$$

und erhalten nach CAUCHY-RIEMANN (Indizes bedeuten partielle Ableitungen):

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{s}_2, \quad \mathfrak{r}_2 = -\mathfrak{s}_1, \qquad \Delta\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{11} + \mathfrak{r}_{22} = 0, \quad \Delta\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_{11} + \mathfrak{s}_{22} = 0.$$

Da $\mathfrak{y}$ isotrop, folgt:

$$\dot{\mathfrak{y}}^2 = (\mathfrak{r}_1 + i\,\mathfrak{s}_1)^2 = (\mathfrak{r}_1 - i\,\mathfrak{r}_2)^2 = (i\,\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2)^2 \equiv 0\,\{u_1, u_2\},$$

$$\left(\dot{\mathfrak{y}} = \frac{d\mathfrak{y}}{du}, \ \ddot{\mathfrak{y}} = \frac{d^2\mathfrak{y}}{du^2}, \ldots\right)$$

und daher

$$(6) \quad \mathfrak{r}_1^2 = \mathfrak{r}_2^2, \ \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = 0, \ \Delta\mathfrak{r} = 0 \quad \text{bzw.} \quad g_{11} = g_{22} = \lambda(u_1, u_2) \neq 0, \ g_{12} = 0.$$

u_1 und u_2 sind also isotherme Flächenparameter auf der (reellen) Minimalfläche $\mathfrak{r}$:

$$(7) \qquad \langle d\mathfrak{r}, d\mathfrak{r}\rangle = \lambda(u_1, u_2)\,(du_1^2 + du_2^2).$$

Wir vergleichen jetzt die binäre metrische Fundamentalform (7) der Minimalfläche $\mathfrak{r}$ mit den binären metrischen Fundamentalformen $\langle d\mathfrak{r}_3, d\mathfrak{r}_3\rangle$ und $\langle d\mathfrak{r}'_3, d\mathfrak{r}'_3\rangle$ ihrer B-Kugelbilder $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}'_3$. Zunächst gilt:

$$d\boldsymbol{r}_3\, d\bar{\boldsymbol{r}}_3 = \langle d\mathfrak{r}_3, d\mathfrak{r}_3\rangle, \qquad d\boldsymbol{r}'_3\, d\bar{\boldsymbol{r}}'_3 = \langle d\mathfrak{r}'_3, d\mathfrak{r}'_3\rangle,$$

[2]) Vgl. [1]), S. 207.

[3]) Vgl. [1]), S. 208; $\alpha=3$, $\beta=1$, $\gamma=2$; $(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)=(-2)\cdot 1\cdot 1=-2<0$.

ferner:

$$\boldsymbol{r}_2\bar{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{r}_1\bar{\boldsymbol{r}}_2 = \bar{\boldsymbol{s}}, \quad \boldsymbol{s} + \bar{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{r}_2\bar{\boldsymbol{r}}_1 + \boldsymbol{r}_1\bar{\boldsymbol{r}}_2 = 0.$$

Damit ergibt sich mit Rücksicht auf (3), (4) und (5):

$$\langle d\mathfrak{r}_3, d\mathfrak{r}_3\rangle = (\tau_{31} + \tau_{02})^2 + (\tau_{23} + \tau_{01})^2,$$
$$\langle d\mathfrak{r}'_3, d\mathfrak{r}'_3\rangle = (\tau_{31} - \tau_{02})^2 + (\tau_{23} - \tau_{01})^2.$$

Es kommt also jetzt auf die Kenntnis der PFAFFschen Formen $\tau_{01}, \tau_{02}, \tau_{31}, \tau_{23}$ bzw. der Vektoren $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ an. Wir setzen

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{\mathfrak{r}_1}{\sqrt{\mathfrak{r}_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathfrak{r}_1, \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{\mathfrak{r}_2}{\sqrt{\mathfrak{r}_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\mathfrak{r}_2, \quad \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = 0, \quad \mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{a}_2^2 = 1.$$

Sind $g^{\alpha\beta}$ die kontravarianten Komponenten der Metrik (6) und $\Gamma_{\varrho,\alpha\beta}\Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta}$ ihre CHRISTOFFEL-Symbole, so gilt:

$$\mathfrak{r}_\gamma \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \mathfrak{r}_\gamma(\mathfrak{r}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta}\mathfrak{r}_\varrho) = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} - \Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta}g_{\varrho\gamma} = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} - \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} = 0,$$
$$\alpha,\beta,\gamma,\varrho = 1,2.$$

Die Vektoren $\mathfrak{h}_{11}, \mathfrak{h}_{12}, \mathfrak{h}_{22}$ liegen also in der Normalebene der Fläche $\mathfrak{r}$. Da $\mathfrak{r}$ Minimalfläche ist, verschwindet der mittlere Krümmungsvektor

$$\mathfrak{h} = g^{\alpha\beta}\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda}(\mathfrak{h}_{11} + \mathfrak{h}_{22}) = 0.$$

$\mathfrak{h}_{11}$ und $\mathfrak{h}_{12}$ oder $\mathfrak{h}_{22}$ und $\mathfrak{h}_{12}$ können daher als linear unabhängige Normalvektoren der Fläche $\mathfrak{r}$ eingeführt und als Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_3$ normiert werden. Ihre Orthogonalität ist gesichert, wenn der komplexe Parameter u der isotropen Kurve $\mathfrak{y}(u)$ als STUDY-VESSIOTscher Parameter normiert wird. Denn dann gilt:

$$\dot{\mathfrak{y}}^2 = 0, \ \ddot{\mathfrak{y}}^2 = (\mathfrak{r}_{11} - i\,\mathfrak{r}_{21})^2 = (\mathfrak{r}_{12} - i\,\mathfrak{r}_{22})^2 = \mathfrak{r}_{11}^2 - \mathfrak{r}_{12}^2 - 2i\,\mathfrak{r}_{11}\mathfrak{r}_{12}$$
$$= \mathfrak{r}_{12}^2 - \mathfrak{r}_{22}^2 - 2i\,\mathfrak{r}_{12}\mathfrak{r}_{22} = -1$$

und daher, da -1 reell, zunächst:

$$\mathfrak{r}_{11}\mathfrak{r}_{12} = \mathfrak{r}_{22}\mathfrak{r}_{12} = 0. \tag{8}$$

Zur Berechnung der Vektoren $\mathfrak{h}_{11} = -\mathfrak{h}_{22}$ und $\mathfrak{h}_{12}$ notieren wir die Werte der CHRISTOFFEL-Symbole in isothermen Parametern:

$$\Gamma_{1,11} = \frac{\lambda_1}{2}, \quad \Gamma_{1,12} = \frac{\lambda_2}{2}, \quad \Gamma_{1,22} = -\frac{\lambda_1}{2},$$

$$\Gamma_{2,11} = -\frac{\lambda_2}{2}, \quad \Gamma_{2,12} = \frac{\lambda_1}{2}, \quad \Gamma_{2,22} = \frac{\lambda_2}{2},$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda_1}{2\lambda}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{\lambda_2}{2\lambda}, \quad \Gamma^1_{22} = -\frac{\lambda_1}{2\lambda},$$

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{\lambda_2}{2\lambda}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{\lambda_1}{2\lambda}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{\lambda_2}{2\lambda}.$$

Damit ergibt sich:

$$\mathfrak{h}_{11} = -\mathfrak{h}_{22} = \mathfrak{r}_{11} - \frac{\lambda_1}{2\lambda}\mathfrak{r}_1 + \frac{\lambda_2}{2\lambda}\mathfrak{r}_2, \qquad \mathfrak{h}_{12} = \mathfrak{r}_{12} - \frac{\lambda_2}{2\lambda}\mathfrak{r}_1 - \frac{\lambda_1}{2\lambda}\mathfrak{r}_2,$$

$$\mathfrak{h}_{11}\mathfrak{h}_{12} = -\mathfrak{h}_{22}\mathfrak{h}_{12} = \mathfrak{r}_{11}\mathfrak{r}_{12} - \frac{\lambda_1}{2\lambda}(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_{12} + \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_{11}) + \frac{\lambda_2}{2\lambda}(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_{12} - \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_{11}).$$

Der erste Term der rechten Seite der letzten Gleichung verschwindet gemäß (8), der zweite verschwindet, da $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = 0$ und der dritte verschwindet, da $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = 0$ und $\mathfrak{r}_{11} = -\mathfrak{r}_{22}$. Damit ist gezeigt: *Die Vektoren* $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ *des begleitenden normierten und orthogonalisierten Vierbeins der Minimalfläche können aus deren Ortsvektor* $\mathfrak{r}$ *explizit berechnet werden:*

(9)
$$\boxed{\begin{gathered}\mathfrak{a}_0 = \frac{\mathfrak{h}_{12}}{\sqrt{\nu}}, \quad \mathfrak{a}_1 = \frac{\mathfrak{r}_1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{\mathfrak{r}_2}{\sqrt{\lambda}}, \quad \mathfrak{a}_3 = \frac{\mathfrak{h}_{11}}{\sqrt{\mu}} = \frac{-\mathfrak{h}_{22}}{\sqrt{\mu}}, \\ \lambda = \mathfrak{r}_1^2 = \mathfrak{r}_2^2, \quad \mu = \mathfrak{h}_{11}^2 = \mathfrak{h}_{22}^2, \quad \nu = \mathfrak{h}_{12}^2, \quad (\ddot{\imath}^2 = -1)\end{gathered}}.$$

Wir kehren jetzt zur Berechnung der PFAFFschen Formen $\tau_{ik} = -\mathfrak{a}_i\, d\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_k\, d\mathfrak{a}_i$ zurück:

$$\tau_{31} = -\mathfrak{a}_3\, d\mathfrak{a}_1 = -\mathfrak{a}_3\, d\left(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sqrt{\lambda}}\right) = -\mathfrak{a}_3 \frac{\sqrt{\lambda}\,(\mathfrak{r}_{11}\,du_1 + \mathfrak{r}_{12}\,du_2) - \mathfrak{r}_1\, d\sqrt{\lambda}}{\lambda}$$
$$= \frac{\mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{11}\,du_1 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{12}\,du_2}{-\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau_{02} = -\mathfrak{a}_0\, d\mathfrak{a}_2 = -\mathfrak{a}_0\, d\left(\frac{\mathfrak{r}_2}{\sqrt{\lambda}}\right) = -\mathfrak{a}_0 \frac{\sqrt{\lambda}\,(\mathfrak{r}_{12}\,du_1 + \mathfrak{r}_{22}\,du_2) - \mathfrak{r}_2\, d\sqrt{\lambda}}{\lambda}$$
$$= \frac{\mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{12}\,du_1 + \mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{22}\,du_2}{-\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau_{23} = \mathfrak{a}_3\, d\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_3\, d\left(\frac{\mathfrak{r}_2}{\sqrt{\lambda}}\right) = \mathfrak{a}_3 \frac{\sqrt{\lambda}\,(\mathfrak{r}_{12}\,du_1 + \mathfrak{r}_{22}\,du_2) - \mathfrak{r}_2\, d\sqrt{\lambda}}{\lambda}$$
$$= \frac{\mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{12}\,du_1 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{22}\,du_2}{+\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau_{01} = -\mathfrak{a}_0\, d\mathfrak{a}_1 = -\mathfrak{a}_0\, d\left(\frac{\mathfrak{r}_1}{\sqrt{\lambda}}\right) = -\mathfrak{a}_0 \frac{\sqrt{\lambda}\,(\mathfrak{r}_{11}\,du_1 + \mathfrak{r}_{12}\,du_2) - \mathfrak{r}_1\, d\sqrt{\lambda}}{\lambda}$$
$$= \frac{\mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{11}\,du_1 + \mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{12}\,du_2}{-\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau_{31} + \tau_{02} = \frac{(\mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{11} + \mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{12})\,du_1 + (\mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{12} + \mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{22})\,du_2}{-\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau_{31} - \tau_{02} = \frac{(\mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{12} - \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{11})\,du_1 + (\mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{22} - \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{12})\,du_2}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\left(\langle d\mathfrak{r}_3, d\mathfrak{r}_3\rangle = (\tau_{31} + \tau_{02})^2 + (\tau_{23} + \tau_{01})^2\right),$$

$$\tau_{23} + \tau_{01} = \frac{(\mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{12} - \mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{11})\,du_1 + (\mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{22} - \mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{12})\,du_2}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau_{23} - \tau_{01} = \frac{(\mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{11} + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{12})\,du_1 + (\mathfrak{a}_0\mathfrak{r}_{12} + \mathfrak{a}_3\mathfrak{r}_{22})\,du_2}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\left(\langle d\mathfrak{r}_3', d\mathfrak{r}_3'\rangle = (\tau_{31} - \tau_{02})^2 + (\tau_{23} - \tau_{01})^2\right),$$

$$(\tau_{31}+\tau_{02})^2 = \frac{(a_3 r_{11}+a_0 r_{12})^2\,du_1^2+2(a_3 r_{11}+a_0 r_{12})(a_3 r_{12}+a_0 r_{22})\,du_1 du_2+(a_3 r_{12}+a_0 r_{22})^2\,du_2^2}{\lambda},$$

$$(\tau_{23}+\tau_{01})^2 = \frac{(a_3 r_{12}-a_0 r_{11})^2\,du_1^2+2(a_3 r_{12}-a_0 r_{11})(a_3 r_{22}-a_0 r_{12})\,du_1 du_2+(a_3 r_{22}-a_0 r_{12})^2\,du_2^2}{\lambda},$$

$$(\tau_{31}-\tau_{02})^2 = \frac{(a_0 r_{12}-a_3 r_{11})^2\,du_1^2+2(a_0 r_{12}-a_3 r_{11})(a_0 r_{22}-a_3 r_{12})\,du_1 du_2+(a_0 r_{22}-a_3 r_{12})\,du_2^2}{\lambda},$$

$$(\tau_{23}-\tau_{01})^2 = \frac{(a_0 r_{11}+a_3 r_{12})^2\,du_1^2+2(a_0 r_{11}+a_3 r_{12})(a_0 r_{12}+a_3 r_{22})\,du_1 du_2+(a_0 r_{12}+a_3 r_{22})^2\,du_2^2}{\lambda}.$$

Aus den letzten vier Gleichungen folgt mit Rücksicht auf $r_{11}=-r_{22}$:

$$\langle dr_3,\, dr_3\rangle = \frac{\chi}{\lambda}(du_1^2+du_2^2); \quad \chi(u_1,u_2)=(a_0 r_{11})^2+(a_0 r_{12})^2+(a_3 r_{11})^2+$$
$$+(a_3 r_{12})^2+2(a_0 r_{12})(a_3 r_{11})-2(a_0 r_{11})(a_3 r_{12}),$$

$$\langle dr_3',\, dr_3'\rangle = \frac{\psi}{\lambda}(du_1^2+du_2^2); \quad \psi(u_1,u_2)=(a_0 r_{11})^2+(a_0 r_{12})^2+(a_3 r_{11})^2+$$
$$+(a_3 r_{12})^2+2(a_0 r_{11})(a_3 r_{12})-2(a_0 r_{12})(a_3 r_{11}).$$

Oder:

$$\boxed{\begin{aligned}&\langle dr_3, dr_3\rangle = \sigma(u_1,u_2)\langle dr, dr\rangle, \quad \sigma=\frac{\chi}{\lambda^2},\\ &\langle dr_3', dr_3'\rangle = \sigma'(u_1,u_2)\langle dr, dr\rangle, \quad \sigma'=\frac{\psi}{\lambda^2}\end{aligned}}.$$

Damit ist gezeigt: *Die B-Kugelbilder der reellen (nicht ebenen) Minimalflächen des R_4 sind konform.*

Die GAUSSsche Krümmung K aller solcher Minimalflächen verschwindet nicht. Läßt man auch (komplexe) Minimalflächen mit verschwindender GAUSSscher Krümmung zu[4]), so sind Ausartungen der B-Kugelbilder zu erwarten. Dies zeigt auch schon die (reelle) KILLINGsche Fläche

$$(10) \qquad \mathfrak{x}(u_1,u_2)=\{\sin u_1 \sin u_2, \cos u_1 \cos u_2, \sin u_1 \cos u_2, \cos u_1 \sin u_2\},$$

die keine Minimalfläche darstellt. Man erhält für (10):

$$g_{11}=g_{22}=1, \quad g_{12}=0, \quad K=0, \quad \Gamma_{\varrho,\beta\gamma}=\Gamma^{\varrho}_{\beta\gamma}=0, \quad \varrho,\beta,\gamma=1,2;$$
$$a_0=\{\sin u_1 \sin u_2, \cos u_1 \cos u_2, \sin u_1 \cos u_2, \cos u_1 \sin u_2\},$$
$$a_1=\{\cos u_1 \sin u_2, -\sin u_1 \cos u_2, \cos u_1 \cos u_2, -\sin u_1 \sin u_2\},$$

[4]) Vgl. PINL, M.: Über die komplexen Minimalflächen mit der GAUSSschen Krümmung Null. Arch. d. Math. **2**, 4, 283—288 (1949/50).

$$\mathfrak{a}_2 = \{\sin u_1 \cos u_2, -\cos u_1 \sin u_2, -\sin u_1 \sin u_2, \cos u_1 \cos u_2\},$$
$$\mathfrak{a}_3 = \{\cos u_1 \cos u_2, \sin u_1 \sin u_2, -\cos u_1 \sin u_2, -\sin u_1 \cos u_2\},$$

$$\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \qquad i, k = 0, 1, 2, 3.$$

Für die Komponenten der Ortsvektoren $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_3'$ der B-Kugelbilder ergibt sich:

$$\mathfrak{r}_3 = \{-\cos 2u_2, 0, -\sin 2u_2\}, \qquad \mathfrak{r}_3' = \{-\cos 2u_1, \sin 2u_1, 0\}.$$

Das B-Kugelbild $\mathfrak{r}_3$ ist von u_1, das B-Kugelbild $\mathfrak{r}_3'$ von u_2 unabhängig und die entsprechenden Differentialformen sind beide ausgeartet:

$$\langle d\mathfrak{r}_3, d\mathfrak{r}_3 \rangle = 4du_2^2, \quad \langle d\mathfrak{r}_3', d\mathfrak{r}_3' \rangle = 4du_1^2.$$

Die Fläche ist keine Minimalfläche, da ihr mittlerer Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ nicht verschwindet:

$$\mathfrak{h} = g^{\alpha\beta} \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \mathfrak{x}_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_{11} + \mathfrak{x}_{22} = 2\mathfrak{x}_{11} \neq 0.$$

2 Fuller Road, Ramna-Dacca, East Bengal Pakistan.

(Eingegangen am 23. Juni 1953.)

KRULL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 295—298 (1953)

Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. II.

Von

WOLFGANG KRULL.

Am Schlusse der kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen, gleichbetitelten Note[1]) wurde nach unendlichen Folgen $K_1, K_2, \ldots$ von endlichen algebraischen Zahlkörpern gefragt, die über dem rationalen Zahlkörper K_0 die folgende Eigenschaft (Z) besitzen: Zu jedem rationalzahligen, rational irreduzibeln Polynom $p(x) = x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_n$ gibt es eine „endlich" (d.h. mit endlich vielen rationalen Operationen) berechenbare Schranke $\nu^*(p(x))$, derart, daß $p(x)$ über *allen* K_i irreduzibel bleibt, falls es nur über keinem der Körper K_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu^*(p(x))$ reduzibel wird. — Es soll nun, über das in der früheren Note behandelte Beispiel der imaginär quadratischen Zahlkörper hinaus, kurz gezeigt werden, daß auf mannigfaltige Weise Körperfolgen mit der Eigenschaft (Z) gebildet werden können. Dabei stützen wir uns auf die folgenden bekannten Sätze:

1. Ist $N = K_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ der zu

$$p(x) = x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_n = (x - \alpha_1) \cdot \cdots \cdot (x - \alpha_n)$$

gehörige Normalkörper, so bleibt das rational irreduzible Polynom $p(x)$ sicher auch über K_i irreduzibel, falls $K_i \cap N = K_0$. — 2. Die Diskriminante D von N (über K_0) kann allein aus dem Koeffizienten von $p(x)$ endlich berechnet werden. — 3. Ist $K \leq N$, so ist die Diskriminante von K ein Teiler der Diskriminante D von N. — 4. Ist $K \neq K_0$, so ist die Diskriminante von K niemals gleich ± 1. — 5. Für jedes ganze positive n gibt eine endlich berechenbare Schranke $\mu^*(n)$ für die Anzahl derjenigen endlichen algebraischen Zahlkörper, bei denen der Absolutbetrag der Diskriminante den Wert n nicht übersteigt[2]). Allein auf Grund der Sätze 1—4 ergibt sich fast unmittelbar:

A. Sind die Diskriminanten D_i der Körper K_i $(i = 1, 2, \ldots)$ paarweise teilerfremd, und ist für $i_2 > i_1$ der kleinste in D_2 aufgehende Primfaktor p_2 stets größer als der kleinste in D_1 aufgehende Primfaktor p_1, so hat die Folge $K_1, K_2, \ldots$ die Eigenschaft (Z).

B. Ist jeder der Körper K_i primitiv, gibt es also für kein i zwischen K_0 und K_i einen echten Zwischenkörper, und läßt sich zu jedem n endlich ein

[1]) 57—60: Math. Z. **59**, 57—60 (1953).

[2]) Die Existenz von $\mu^*(n)$ folgt aus der Tatsache, daß man einerseits eine monoton mit N ins Unendliche wachsende untere Schranke für den Absolutwert der Diskriminante eines endlichen algebraischen Zahlkörpers des Grades N besitzt, und daß man andererseits für jedes feste Paar N, n eine Schranke für die Anzahl aller der Zahlkörper N-ten Grades berechnen kann, deren Diskriminante gleich ± 1 ist. — Vgl. z.B. HASSE: Zahlentheorie, Akademie-Verlag Berlin 1949, S. 454/455.

$i_0(n)$ berechnen, derart, daß der Absolutbetrag der Diskriminante D_i von K_i für $i > i_0(n)$ stets größer wird als n, so besitzt die Folge $K_1, K_2, \ldots$ die Eigenschaft (Z).

Ist nämlich zunächst jeder der Körper K_i primitiv, so muß nach 1. und 3. die Diskriminante D_i von K_i ein Teiler der Diskriminante D des zu $p(x) = (x-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$ gehörigen Normalkörpers $N = K_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sein. Man kann also wegen 2. einfach $\nu^*(p(x)) = i_0(|D|)$ setzen, falls $i_0(n)$ die Funktion ist, deren endliche Berechenbarkeit in B. für jedes n gefordert wurde. Die Behauptung von B. ergibt sich also allein auf Grund der Sätze 1., 2., 3. — Bei A. beachte man: Soll $p(x)$ über K_i reduzibel werden, so muß wegen 1., 3., 4. jedenfalls D durch mindestens einen Primfaktor von D_i teilbar sein. Sind ferner $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$ die nach wachsender Größe geordneten Primzahlen, so wird unter den Voraussetzungen von A. für $i > \nu^*(p(x))$ sicher D_i zu D prim, falls man $\nu^*(p(x))$ gleich der größten ganzen Zahl i_0 setzt, bei der eben noch $p_{i_0} \leq |D|$. — Aus A. ergibt sich im speziellen sofort:

Sind $p_1, p_2, \ldots$ die nach wachsender Größe geordneten Primzahlen, $f_1, f_2, \ldots$ irgendwelche ganzen positiven Zahlen und bedeutet K_i den Körper der p^{f_i}-ten Einheitswurzeln, so besitzt die Folge $K_1, K_2, \ldots$ die Eigenschaft (Z).

Aus B. dagegen erhält man unter anderem die Sätze:

Es seien $a_1, a_2, \ldots$ untereinander verschiedene ganze Zahlen, die der Bedingung $|a_{i+1}| \geq |a_i|$ genügen, und von denen keine durch die p-te Potenz einer Primzahl teilbar ist. Dann hat die Folge der Körper $K_i = K_0(\sqrt[p]{a_i})$ die Eigenschaft (Z)[3]). (Anwendungsmöglichkeit insbesondere auf die Folge *aller* nach wachsendem Absolutbetrag der Diskriminante geordneten quadratischen Zahlkörper.) — Jede Folge $K_1, K_2, \ldots$ von untereinander verschiedenen primitiven algebraischen Zahlkörpern, bei denen die zugehörigen Diskriminantenbeträge $|D_i|$ eine nicht abnehmende Folge bilden, besitzt die Eigenschaft (Z). Erstmalig Anwendung des Satzes 5. Es kann $i_0(n) = \mu^*(n)$ gesetzt werden.]

Man beachte: Das zuletzt formulierte Ergebnis bzw. B. läßt sich *nicht* etwa verallgemeinern zu dem Satz: *Jede* Folge $K_1, K_2, \ldots$ von paarweise verschiedenen primitiven Körpern hat die Eigenschaft (Z). Denn es folgt zwar aus 1. und 3. sofort, daß bei jeder derartigen Folge jedes über K_0 irreduzible Polynom $p(x)$ über fast allen K_i irreduzibel bleiben muß. Aber für uns war die Existenz der endlich berechenbaren Schranke $\nu^*(p(x))$ der wesentliche Punkt, und die Tatsache allein, daß alle K_i primitiv sein sollen, bietet natürlich keine genügende Grundlage für die Berechnung von $\nu^*(p(x))$.

Schließlich ist zu betonen, daß der in der früheren Note betrachteten Folge der imaginär quadratischen Zahlkörper immer noch eine gewisse Vorzugsstellung vor den übrigen Körperfolgen eingeräumt werden muß, bei denen die Gültigkeit von (Z) aus einem der Kriterien A., B. folgt. Denn die endliche Berechnung der Diskriminante D des zu $p(x)$ gehörigen Normalkörpers N ist zwar grundsätzlich möglich, aber in der Regel so umständlich, daß von

[3]) Die Existenz von $i_0(n)$ folgt hier bereits aus der Tatsache, daß die Diskriminante D_i von K_i durch $p_{i1}\cdot\ldots\cdot p_{im_i}$ teilbar ist, falls $p_{i1}, \ldots, p_{im_i}$ die verschiedenen in a_i aufgehenden Primzahlen bedeuten, und daß $(p_{i1}\cdot\ldots\cdot p_{im_i})^p > |a_i|$.

einer *praktischen* Durchführbarkeit nicht die Rede sein kann. Man wird sich daher in erster Linie für solche Körperfolgen $K_1, K_2, \ldots$ mit der Eigenschaft (Z) interessieren, bei denen zu jedem einzelnen Polynom $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, zum mindesten im Falle ganzzahliger Koeffizienten a_i, die Schranke $v^*(p(x))$ unmittelbar aus den a_i berechnet werden kann. Daß es solche Fälle gibt, zeigt eben das Beispiel der imaginär quadratischen Zahlkörper, bei dem man zur Bestimmung von $v^*(p(x))$ nur eine Schranke für die $|a_i|$ $(i = 1, \ldots, n)$ braucht. Aber es fragt sich noch immer, ob es weitere wesentlich verschiedene Körperfolgen $K_1, K_2, \ldots$ mit der Eigenschaft (Z) gibt, bei denen die Schranke $v^*(p(x))$ in einer ähnlichen, direkten Weise ermittelt werden kann, etwa dadurch, daß man neben der Größe der Absolutbeträge noch passende Kongruenzeigenschaften der a_i heranzieht. Oder nehmen etwa die imaginär quadratischen Zahlkörper eine absolute Sonderstellung ein, die darauf beruht, daß nur bei ihnen die Menge aller ganzen Zahlen ein diskretes Gitter in der komplexen Zahlenebene bildet?

Bonn, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 26. September 1953.)

Baer, R.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 299—338 (1953)

Das Hyperzentrum einer Gruppe. III.

Von
Reinhold Baer.

Der Begriff des hyperzentralen Normalteilers einer endlichen Gruppe läßt sich durch eine Fülle äquivalenter Eigenschaften charakterisieren, die jedoch beim Übergang zum Unendlichen verschiedene Klassen von Normalteilern definieren. Unter den sich so ergebenden Möglichkeiten sind zwei Extreme ausgezeichnet: Der umfassendste Begriff, den wir als Hyperzentralität bezeichnet haben, und der wohl schärfste [engste] Begriff, den wir Oberhyperzentralität genannt haben; s. Baer [2], [3], im folgenden als H I bzw. H II zitiert. Wir wollen hier die Untersuchung dieser Begriffe fortsetzen. Es wird bequem sein, zunächst die Definitionen und für uns wichtigsten Eigenschaften zu rekapitulieren.

Definition 1. *Der Normalteiler N der Gruppe G ist oberhyperzentral in G, wenn $(N/M) \cap Z(G/M) \neq 1$ für jeden $M < N$ erfüllenden Normalteiler M von G gilt.*

Hier wie stets bedeute $Z(H)$ das *Zentrum* der Gruppe H.

Diese oberhyperzentralen Normalteiler haben die folgende wichtige Abgeschlossenheitseigenschaft.

Satz A. *Sind M und N Normalteiler der Gruppe G und ist $M < N$, so ist N dann und nur dann ein oberhyperzentraler Normalteiler von G, wenn M ein oberhyperzentraler Normalteiler von G und N/M ein oberhyperzentraler Normalteiler von G/M ist* [H I, § 2, Proposition 2, (viii)].

Gruppen, die oberhyperzentrale [hyperzentrale] Normalteiler ihrer selbst sind, heißen *obernilpotent* [*nilpotent*]. Die große Schärfe unserer Definition 1 geht nun aus dem folgenden für uns fundamentalen Satz hervor.

Satz B. *Die Maximalbedingung wird von den Untergruppen endlich erzeugbarer, obernilpotenter Gruppen erfüllt* [H I, § 8, Theorem].

Gegenstand der vorliegenden Untersuchung sind die endlich erzeugbaren, oberhyperzentralen Normalteiler; und der Satz B mag als Anlaß dafür angesehen werden. In § 1, Hauptsatz 1 stellen wir dem Satz B die folgende bemerkenswerte Eigenschaft zur Seite: Zu jeder endlich erzeugbaren, obernilpotenten Gruppe G existiert eine positive ganze Zahl n derart, daß 1 der Durchschnitt aller der charakteristischen Untergruppen X von G ist, deren Index $[G:X]$ eine Primzahlpotenz p^x mit $x \leqq n$ ist. Daß diese Eigenschaft für Obernilpotenz auch hinreichend ist, ist übrigens leicht einzusehen.

Das eigentliche Thema unserer Untersuchung ist aber der Unterschied zwischen oberhyperzentral und hyperzentral.

Definition 2. *Der Normalteiler N der Gruppe G ist hyperzentral in G, wenn für jede Untergruppe U von G und für jeden Normalteiler V von U mit endlichem Index $[U:V]$ gilt:*

$(U \cap N)V/V$ ist ein [im üblichen Sinne] hyperzentraler Normalteiler der endlichen Gruppe U/V.

Um das Problem des Zusammenhangs zwischen Hyperzentralität und Oberhyperzentralität in dem uns allein interessierenden Spezialfall der endlich erzeugbaren Normalteiler klar herauszuarbeiten, müssen wir zunächst diesen Zusammenhang im allgemeinen Falle schildern; und dazu werden die folgenden Begriffsbildungen benötigt.

Definition 3. *Der Normalteiler N der Gruppe G ist fast voll reduzibel, wenn $N \neq 1$ und 1 der Durchschnitt aller in N enthaltenen Normalteiler X von G mit folgenden Eigenschaften ist:*

N/X ist ein endlicher, minimaler Normalteiler von G/X.

Definition 4. *Der Normalteiler N der Gruppe G ist lokal fast voll reduzibel, wenn es zu jedem $M < N$ erfüllenden Normalteiler M von G einen in N/M enthaltenen, fast voll reduziblen Normalteiler von G/M gibt.*

Satz C. *Der Normalteiler N von G ist dann und nur dann oberhyperzentral in G, wenn N ein hyperzentraler und lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G ist* [H II, Satz 4].

Wir werden unser Problem nun von zwei, natürlich eng zusammenhängenden Gesichtspunkten aus angreifen. Einerseits wollen wir nämlich die oberhyperzentralen unter den endlich erzeugbaren, hyperzentralen Normalteilern charakterisieren; und wegen Satz C kommt es dabei wesentlich auf eine Abschwächung der Bedingung der lokalen Fast-Voll-Reduzibilität an, die wir durch geeignete Kettenbedingungen ersetzen werden; s. besonders § 4, Hauptsatz 2. Andererseits gehen wir direkt auf eine Charakterisierung der endlich erzeugbaren, oberhyperzentralen Normalteiler aus; und dabei handelt es sich um gleichzeitige Abschwächung der drei Bedingungen: endliche Erzeugbarkeit, Hyperzentralität und lokale Fast-Voll-Reduzibilität. Wir werden hier die endliche Erzeugbarkeit durch eine Maximalbedingung ersetzen; die Hyperzentralität werden wir wesentlich abschwächen, indem wir nur noch an die endlichen Faktorgruppen des untersuchten Normalteilers Forderungen stellen werden [§ 5, Definition 3]; aber naturgemäß werden wir dann bei der Abschwächung der lokalen Fast-Voll-Reduzibilität nicht so weit gehen können wie bei der Betrachtung der endlich erzeugbaren, hyperzentralen Normalteiler; s. § 5, Hauptsatz 3 und die Zusätze dazu. — Da bei allen unseren Kriterien die Hyperzentralität endlicher Normalteiler eine fundamentale Rolle spielt, werden wir diese Frage in § 6 und § 7 besonders untersuchen.

Gelegentlich werden wir auch folgendes Resultat benötigen.

Satz D. *Endlich viel Elemente endlicher Ordnung in einer obernilpotenten Gruppe erzeugen eine endliche Untergruppe* [H I, § 6, Theorem 1, (v)].

Bezeichnungen.

G^i ist die von allen i-ten Potenzen von Elementen in G erzeugte Untergruppe von G.
$[A, B]$ ist die von allen Kommutatoren $a^{-1} b^{-1} a b$ mit a in A und b in B erzeugte Untergruppe.
${}^0G = G$, ${}^{i+1}G = [G, {}^iG]$.
$G^{(0)} = G$, $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$.
$Z_0(G) = 1$, $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z[G/Z_1(G)]$.
$\{T\}$ ist die von der Teilmenge T erzeugte Untergruppe.
$A \cap B$ ist der Durchschnitt der Mengen A und B.
$\bigcap_\sigma A_\sigma$ ist der Durchschnitt der Mengen A_σ.

Eine Gruppe heiße torsionsfrei, wenn 1 ihr einziges Element endlicher Ordnung ist; und sie werde als Torsionsgruppe bezeichnet, wenn alle ihre Elemente endliche Ordnung haben. Bildet die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung einer Gruppe eine Untergruppe, so werden wir diese als die Torsionsuntergruppe dieser Gruppe bezeichnen.

Das Gruppenelement g ist ein *n-Element*, wenn $g^{n^i} = 1$ für hinreichend großes i gilt; und eine Gruppe ist eine *n-Gruppe*, wenn alle ihre Elemente n-Elemente sind.

Ist T eine Teilmenge der Gruppe G, so besteht ihr Zentralisator aus allen $z\,t = t\,z$ für jedes t in T erfüllenden Elementen z aus G, während der Normalisator von T aus allen $g\,T = T\,g$ erfüllenden Elemente g aus G besteht.

1. Die Normalteiler von endlichem Index.

Das Ziel der Betrachtungen dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden

Hauptsatz 1. *Wenn G eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe ist, dann gibt es eine positive ganze Zahl n mit folgender Eigenschaft:*

1 ist der Durchschnitt aller charakteristischen Untergruppen X von G derart, daß der Index $[G:X]$ eine Primzahlpotenz p^a mit $a \leqq n$ ist.

Dem Beweis dieses Hauptsatzes schicken wir die Beweise zweier Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Ist G eine endliche Gruppe von Primzahlpotenzordnung p^m, ist σ ein Automorphismus von G, dessen Ordnung eine Potenz p^a derselben Primzahl p ist, so ist $a < m$.*

Beweis. Es existiert eine Normalteilerkette N_i von G mit den folgenden Eigenschaften:

$$1 = N_0 < \cdots < N_{i-1} < N_i < \cdots < N_k = G;$$

$$N_i = N_i^\sigma,\ x \equiv x^\sigma \text{ modulo } N_{i-1} \text{ für } x \text{ in } N_i;$$

$$[N_i, G] \leqq N_{i-1},\ N_i^p \leqq N_{i-1}.$$

[Die Konstruktion einer solchen Kette kann man etwa folgendermaßen vornehmen: Man konstruiere zunächst eine Gruppe W, die aus G durch Ajunktion eines den Bedingungen

$$w^{p^a} = 1,\ w^{-1} x\, w = x^\sigma \text{ für } x \text{ in } G$$

genügenden Elements w entsteht. Dann erfüllt die Normalteilerkette $G \cap Z_j(W)$ bereits alle Bedingungen mit eventueller Ausnahme der letzten, da ja W die Ordnung p^{m+a} hat; und man kann dann die gesuchte Kette durch Einschalten von Gliedern der Form $[G \cap Z_{j-1}(W)]\,[G \cap Z_j(W)]^{p^i}$ erhalten.]

Wir wollen nun durch vollständige Induktion zeigen, daß

(i) $$x^{\sigma^{p^{i-1}}} \equiv x \text{ modulo } N_{k-i} \text{ für } x \text{ in } G$$

gilt. Diese Behauptung ist sicher für $i=1$ richtig, da ja $G=N_k$ ist; und wir können also die Gültigkeit von (i) für irgendein i mit $0<i<k$ annehmen. Setzen wir dann $\tau=\sigma^{p^{i-1}}$, so gilt

$$x^\tau \equiv x \text{ modulo } N_{k-i} \text{ für jedes } x \text{ in } G.$$

Es ist also $x^{\tau-1}$ ein Element in N_{k-i} und folglich

$$x^{\tau-1} \equiv (x^{\tau-1})^\sigma \equiv \cdots \equiv (x^{\tau-1})^{\sigma^{p^{i-1}}} \equiv (x^{\tau-1})^\tau \text{ modulo } N_{k-i-1},$$

$$(x^{\tau-1})^p \equiv 1 \text{ modulo } N_{k-i-1}.$$

Aus $x^\tau = x^{\tau-1}x$ und diesen Kongruenzen folgt weiter, daß

$$x^{\tau^h} \equiv (x^{\tau-1})^h x \text{ modulo } N_{k-i-1}$$

$$x^{\tau^p} \equiv (x^{\tau-1})^p x \equiv x \text{ modulo } N_{k-i-1}$$

gelten; und damit haben wir (i+1) aus (i) hergeleitet, da ja $\tau^p=\sigma^{p^i}$ ist. Damit ist der induktive Beweis von (i) vollständig geführt. Aus (k) und $N_0=1$ folgt schließlich $\sigma^{p^{k-1}}=1$. Also ist $a\leqq k-1<m$, q.e.d.

Hilfssatz 2. *Es sei N ein oberhyperzentraler Normalteiler der Gruppe G, dessen [endliche] Ordnung eine Primzahlpotenz p^a ist. Weiter sei G/N eine endlich erzeugbare, abelsche Gruppe, p^h die Anzahl der p-Elemente in G/N und r der [endliche] Rang von G/N modulo seiner Torsionsuntergruppe. Dann existiert eine abelsche charakteristische Untergruppe M von G mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *M enthält keine von 1 verschiedenen p-Elemente.*

(b) *$[G:M]$ ist ein Teiler von $p^{(3r+1)(a+b)}$.*

Beweis. Die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in der endlich erzeugbaren abelschen Gruppe G/N ist eine endliche Gruppe. Da N endlich ist, so ist auch die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in G eine endliche Gruppe E. Es ist klar, daß E eine charakteristische Untergruppe von G ist, daß $N\leqq E$ und E/N die Torsionsuntergruppe von G/N ist. Da N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G und G/N abelsch ist, so ist G obernilpotent [Satz A]. Daraus folgt insbesondere die Nilpotenz von E. Mithin ist E das direkte Produkt einer p-Gruppe P und einer Gruppe Q von zu p teilerfremder Ordnung. P und Q sind ebenfalls charakteristische Untergruppen von G, $N\leqq P$ und p^{a+b} die Ordnung von P.

Da P eine charakteristische Untergruppe der obernilpotenten Gruppe G ist, so ist P ein oberhyperzentraler Normalteiler von G [Satz A]. Da P eine endliche p-Gruppe ist, so induziert jedes Element aus G in N einen Automorphismus, dessen Ordnung eine Potenz von p ist [H I, § 3, Lemma 2]; und es folgt aus Hilfssatz 1, daß diese Ordnung ein Teiler von p^{a+b} ist. Mithin ist

$$G^{p^{a+b}} \text{ im Zentralisator } C \text{ von } P \text{ in } G \text{ enthalten.}$$

Da G/E eine freie abelsche Gruppe vom endlichen Range r ist, und da

$$G/E\,G^{p^{a+b}} \simeq [G/E]/[E\,G^{p^{a+b}}/E] = [G/E]/[G/E]^{p^{a+b}}$$

ist, so ist

$$[G : E\,G^{p^{a+b}}] = p^{r(a+b)}.$$

Da $Q \leqq G^{p^{a+b}}$ ist, so ist $E\,G^{p^{a+b}} = P\,G^{p^{a+b}}$; und da p^{a+b} die Ordnung von P ist, so ist

$$[G : G^{p^{a+b}}] \text{ ein Teiler von } p^{(r+1)(a+b)}.$$

Aus $G^{p^{a+b}} \leqq C$ folgt schließlich, daß auch

$$[G : C] \text{ ein Teiler von } p^{(r+1)(a+b)}$$

ist.

Da P eine charakteristische Untergruppe von G ist, so sind auch der Zentralisator C von P in G und das Zentrum $Z(P) = P \cap C$ von P charakteristische Untergruppen von G. Da E das direkte Produkt von P und Q ist, so ist $Q \leqq C$. Wir setzen $C^* = C/Q$ und $V = [QZ(P)]/Q$. Man überzeugt sich ohne Mühe, daß C^*/V eine freie abelsche Gruppe vom Range r ist, und daß die Ordnung von V ein Teiler von p^{a+b} ist. Aus $Z(P) \leqq Z(C)$ folgt $V \leqq Z(C^*)$; und aus der Kommutativität von C^*/V folgern wir weiter

$$[C^*, C^*] \leqq V \leqq Z(C^*).$$

Sind nun x und y irgendwelche Elemente in C^*, so liegt ihr Kommutator $c = x^{-1}y^{-1}x\,y$ in V und also im Zentrum von C^*. Daraus folgern wir

$$c^{p^{a+b}} = 1, \quad y\,c = c\,y,$$

$$y^{-1}x\,y = x\,c, \quad y^{-i}x\,y^i = x\,c^i, \quad y^{-p^{a+}}\,x\,y^{p^{a+b}} = x\,c^{p^{a+b}} = x,$$

so daß $y^{p^{a+b}}$ im Zentrum von C^* liegt. Mithin wird

$$C^{*p^{a+b}} \leqq Z(C^*).$$

Da $V \leqq Z(C^*)$ und C^*/V eine freie abelsche Gruppe vom Range r ist, so ergibt sich wieder, daß

$$[C^* : Z(C^*)] \text{ ein Teiler von } p^{r(a+b)}$$

ist.

Da $Z(C^*)$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe ist, deren Torsionsuntergruppe gerade V ist, und da die Ordnung von V ein Teiler von p^{a+b} ist, so ist

$$M^* = Z(C^*)^{p^{a+b}}$$

eine freie abelsche Gruppe vom Range r; und es ergibt sich wieder, daß

$$[Z(C^*) : M^*] \text{ ein Teiler von } p^{r(a+b)}$$

und also

$$[C^* : M^*] \text{ ein Teiler von } p^{2r(a+b)}$$

ist.

Es gibt eine eindeutig bestimmte Untergruppe M von G, die Q enthält und $M^* = M/Q$ erfüllt. Aus der Konstruktion von M^* ergibt sich, daß M eine charakteristische Untergruppe von G ist; denn P, Q, C sind ja charakteristische Untergruppen von G. Da M^* eine torsionsfreie abelsche Gruppe ist, und da die Ordnung von Q zu p teilerfremd ist, so enthält M keine von 1 verschiedenen p-Elemente. Es ist insbesondere also $N \cap M = 1$, so daß M der Untergruppe MN/N der abelschen Gruppe G/N isomorph ist. Folglich ist M abelsch. Da schließlich $[G:C]$ ein Teiler von $p^{(r+1)(a+b)}$ und $[C:M] = [C^*:M^*]$ ein Teiler von $p^{2r(a+b)}$ ist, so ist $[G:M]$ ein Teiler von $p^{(3r+1)(a+b)}$, q.e.d.

Beweis von Hauptsatz 1. Da G eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe ist, so wird die Maximalbedingung von den Untergruppen von G erfüllt [Satz B]. Also existiert auch eine [kleinste] positive ganze Zahl k derart, daß

$$G = Z_k(G)$$

ist [H I, § 2, Proposition 2, (viii)].

Wir werden durch vollständige Induktion für jedes $0 \leqq i \leqq k$ erfüllende i folgendes beweisen:

(i) *Es gibt eine positive ganze Zahl $m(i)$ und eine Menge $\Theta(i)$ von in $Z_i = Z_i(G)$ enthaltenen, charakteristischen Untergruppen von G mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Der Durchschnitt der Untergruppen in $\Theta(i)$ ist 1.*

(b) *Zu jeder Untergruppe X in $\Theta(i)$ gibt es eine Primzahl p derart, daß $[Z_i:X]$ ein Teiler von $p^{m(i)}$ ist.*

Wir schicken dem Beweis einige Bemerkungen voraus. Da die Maximalbedingung von den Untergruppen von G erfüllt wird, so ist Z_i/Z_{i-1} für $0 < i$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe. Die Elemente endlicher Ordnung in Z_i/Z_{i-1} bilden eine endliche charakteristische Untergruppe E_i. Dann ist $[Z_i/Z_{i-1}]/E_i$ eine freie abelsche Gruppe von endlichem Range $r(i)$. Weiter wollen wir unter $s(i)$ die größte Zahl derart verstehen, daß die $s(i)$-te Potenz einer Primzahl in der Ordnung von $E(i)$ aufgeht. Dann ist also stets die Ordnung der p-Komponente von $E(i)$ ein Teiler von $p^{s(i)}$.

Da $Z_0 = 1$ ist, so ist (0) sicherlich wahr. Wir können also annehmen, daß $(i-1)$ für irgendein i mit $0 < i \leqq k$ bereits bewiesen ist, und wenden uns der Herleitung von (i) aus $(i-1)$ zu. Zunächst setzen wir

$$m(i) = [3r(i) + 1]\,[m(i-1) + s(i)].$$

Da $m(i-1)$ positiv und weder $r(i)$ noch $s(i)$ negativ ist, so ist auch $m(i)$ positiv.

Wir betrachten nun eine charakteristische Untergruppe X in $\Theta(i-1)$ und setzen

$$H = Z_i/X \quad \text{und} \quad N = Z_{i-1}/X.$$

Es existiert eine Primzahl p derart, daß die Ordnung von N ein Teiler p^a von $p^{m(i-1)}$ ist. Aus der Gültigkeit der Maximalbedingung für die Untergruppen von G folgt weiter, daß H/N eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe

ist; und aus der Obernilpotenz von G folgern wir die Obernilpotenz von H und die Oberhyperzentralität des Normalteilers N von H [Satz A]. Die Torsionsuntergruppe von H/N ist isomorph zu $E(i)$, so daß die Ordnung p^h der p-Komponente dieser Torsionsuntergruppe ein Teiler von $p^{s(i)}$ ist. Aus der Isomorphie von H/N und Z_i/Z_{i-1} folgern wir weiter, daß H/N modulo seiner Torsionsuntergruppe eine freie abelsche Gruppe vom Range $r(i)$ ist. Wir können also aus Hilfssatz 2 die Existenz einer abelschen, charakteristischen Untergruppe M von H mit den folgenden Eigenschaften folgern:

(a) M enthält keine von 1 verschiedenen p-Elemente.

(b) $[H:M]$ ist ein Teiler von $p^{[3r(i)+1][a+b]}$.

Aus (b) und der Definition von $m(i)$ folgt dann, daß

(b′) $[H:M]$ ein Teiler von $p^{m(i)}$ ist.

Ist q eine von p verschiedene Primzahl, so ist $M^{q^{s(i)+1}}$ eine charakteristische Untergruppe von M und also von H. Aus der Isomorphie der q-Komponente von $E(i)$ mit der q-Komponente der Torsionsuntergruppe von H/N folgt die Abwesenheit von von 1 verschiedenen q-Elementen in $M^{q^{s(i)+1}}$. Ein Element endlicher Ordnung aus M gehört also dann und nur dann zu $M^{q^{s(i)+1}}$, wenn seine Ordnung zu $p\,q$ teilerfremd ist. Es folgt, daß

$$[M:M^{q^{s(i)+1}}] \text{ ein Teiler von } q^{s(i)+r(i)[s(i)+1]}$$

und also auch ein Teiler von $q^{m(i)}$ ist. Anwendung von (b′) ergibt, daß

(b″) $$[H:M^{q^{s(i)+1}}] \text{ ein Teiler von } (p\,q)^{m(i)}$$

ist. Da H eine obernilpotente Gruppe ist, so ist $H/M^{q^{s(i)+1}}$ eine endliche nilpotente Gruppe, deren Ordnung nur durch die Primzahlen p und q teilbar ist. Wegen (b′) existiert dann eine und nur eine Untergruppe $M(q)$ von H mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(c) $$M \cap M(q) = M^{q^{s(i)+1}}.$$

(d) $$[H:M(q)] \text{ ist ein Teiler von } q^{m(i)}.$$

Da M und $M^{q^{s(i)+1}}$ charakteristische Untergruppen von H sind, so ist auch $M(q)$ eine charakteristische Untergruppe von H. — Da M eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe ist, da $M^{q^{s(i)+1}} \leqq M^q$ ist, und da $M^{q^{s(i)+1}}$ nur Elemente endlicher Ordnung enthält, deren Ordnung zu $p\,q$ teilerfremd ist, so ist

$$\bigcap_{q \neq p} M^{q^{s(i)+1}} = 1;$$

und hieraus folgt wegen (c), daß

(e) $$M \cap \bigcap_{q \neq p} M(q) = 1$$

ist.

Es gibt eindeutig bestimmte, X enthaltende Untergruppen $X(p)$ bzw. $X(q)$ von G derart, daß

$$M = X(p)/X \quad \text{und} \quad M(q) = X(q)/X \quad \text{für} \quad p \neq q$$

ist. Da X eine charakteristische Untergruppe von G ist, die in der charakteristischen Untergruppe Z_{i-1} von G enthalten ist, da die $M(q)$ wie auch M charakteristische Untergruppen von $H=Z_i/X$ sind und Z_i eine charakteristische Untergruppe von G ist, so sind die $X(q)$ charakteristische Untergruppen von G, die in Z_i enthalten sind, und deren Durchschnitt wegen (e) genau X ist. Aus (d) folgt noch:

(d') $[Z_i : X(q)]$ ist ein Teiler von $q^{m(i)}$.

Wir wählen jetzt als $\Theta(i)$ das System aller $X(q)$ mit X in $\Theta(i-1)$ und für alle Primzahlen q. Da jedes X der Durchschnitt aller $X(q)$, und da 1 der Durchschnitt aller X in $\Theta(i-1)$ ist, so ist der Durchschnitt aller Y in $\Theta(i)$ gleich 1. Wegen (d') genügt also das System $\Theta(i)$ den beiden Forderungen aus (i); und damit haben wir gezeigt, daß (i) aus $(i-1)$ folgt.

Damit ist der induktive Beweis von (i) vollendet; und es gilt insbesondere (k). Da aber $G=Z_k$ ist, so folgt, daß 1 der Durchschnitt gewisser charakteristischer Untergruppen X von G mit der Eigenschaft

$$[G : X] \text{ ist eine Primzahlpotenz } p^x \text{ mit } x \leq m(k) = n$$

ist; und damit ist der Beweis von Hauptsatz 1 voll erbracht.

Bemerkung 1. Die Voraussetzung der endlichen Erzeugbarkeit ist für die Gültigkeit unseres Satzes unentbehrlich, da es ja viele Beispiele unendlicher abelscher Gruppen ohne echte Untergruppen von endlichem Index gibt.

Zusatz 1. *Die Gruppe G ist obernilpotent, wenn es eine positive ganze Zahl n und eine Menge Θ von Normalteilern von G mit den folgenden beiden Eigenschaften gibt:*

(a) *Der Durchschnitt der Untergruppen in Θ ist 1.*

(b) *Zu jedem Normalteiler X in Θ gibt es eine Primzahl p derart, daß $[G:X]$ ein Teiler von p^n ist.*

Beweis. Ist nämlich X ein Normalteiler in Θ, so ist G/X eine endliche p-Gruppe, deren Kompositionsreihe nicht länger als n sein kann. Also ist sicherlich ${}^nG \leq X$ für jedes X in Θ; und daraus folgt ${}^nG = 1$ wegen (a). Dann ist aber auch $G = Z_n(G)$, woraus ohne weiteres die Obernilpotenz von G folgt; s. etwa H I, § 2, Proposition 2, (viii).

Bemerkung 2. Zusatz 1 enthält unter anderem eine Umkehrung von Hauptsatz 1.

Zusatz 2. *Die folgenden beiden Eigenschaften der endlich erzeugbaren Gruppe G sind miteinander äquivalent:*

(I) $\bigcap_{i=0}^{\infty} {}^iG = 1$.

(II) *Der Durchschnitt aller Normalteiler X mit endlicher nilpotenter Faktorgruppe G/X ist 1.*

Beweis. Ist zunächst X ein Normalteiler mit endlicher nilpotenter Faktorgruppe G/X, so existiert bekanntlich eine positive ganze Zahl i derart,

daß ${}^{i}(G/X) = 1$ ist; und dies ist äquivalent zu ${}^{i}G \leqq X$. Aus dieser Bemerkung ergibt sich sofort [unter Zuhilfenahme von Hauptsatz 1], daß (I) aus (II) folgt. — Ist i positiv, so ist $G/{}^{i}G$ eine endlich erzeugbare obernilpotente Gruppe; s. etwa H I, § 2, Proposition 2, (viii); und nun folgt aus Hauptsatz 1, daß 1 der Durchschnitt aller Normalteiler von $G/{}^{i}G$ mit endlicher nilpotenter Faktorgruppe ist. Folglich ist ${}^{i}G$ der Durchschnitt aller ${}^{i}G$ enthaltenden Normalteiler von G, deren Faktorgruppe endlich und nilpotent ist. Mithin folgt (II) aus (I), q.e.d.

Bemerkung 3. Aus einem bekannten Magnusschen Satze folgt, daß alle freien Gruppen die Eigenschaft (I) des Zusatz 2 haben. Nichtabelsche freie Gruppen sind aber nicht obernilpotent, da ihr Zentrum ja gleich 1 ist. Hieraus folgt, daß (II) nicht zum Beweis der Obernilpotenz ausreicht. Ob dagegen (II) ausreicht, um die Obernilpotenz nilpotenter Gruppen mit Maximalbedingung zu beweisen, scheint noch eine offene Frage zu sein. — Das Beispiel der freien Gruppen zeigt auch, daß die Eigenschaften (I), (II) nicht invariant unter Faktorgruppenbildung sind.

Zusatz 3. *Jede endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe besitzt eine torsionsfreie charakteristische Untergruppe von endlichem Index.*

Beweis. Ist G eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe, so ist jede Untergruppe von G endlich erzeugbar [Satz B]. Es folgt also aus Satz D, daß die Gesamtheit E der Elemente endlicher Ordnung in G eine endliche Untergruppe von G ist. Zu jedem Element $e \neq 1$ in E existiert nach Hauptsatz 1 wenigstens eine charakteristische Untergruppe $C(e)$ von G, die e nicht enthält und deren Index $[G:C(e)]$ endlich ist. Der Durchschnitt D dieser charakteristischen Untergruppen $C(e)$ ist ebenfalls eine charakteristische Untergruppe von G, deren Index $[G:D]$ wegen der Endlichkeit von E ebenfalls endlich ist. Weiter ist $E \cap D = 1$, so daß D torsionsfrei ist.

2. Erweiterungen abelscher Gruppen durch endlich erzeugbare obernilpotente Gruppen.

Der folgende Begriff wird sich für die Erörterungen dieses Paragraphen als nützlich erweisen.

Definition 1. *Die Gruppe A ist eine Minimaxgruppe, wenn sie abelsch ist und eine endlich erzeugbare Untergruppe U derart enthält, daß die Minimalbedingung von den Untergruppen von A/U erfüllt wird.*

Bemerken wir, daß die Maximalbedingung von den Untergruppen endlich erzeugbarer abelscher Gruppen erfüllt wird, und daß Minimal- und Maximalbedingungen sich auf Untergruppen und Faktorgruppen vererben, so sehen wir, daß

Unter- und Faktorgruppen von Minimaxgruppen ebenfalls Minimaxgruppen sind.

Lemma 1. *Die abelsche Gruppe A ist dann und nur dann eine Minimaxgruppe, wenn es*

(a) *nur endlich viele Elemente quadratfreier Ordnung in A gibt und es*

(b) *eine endlich erzeugbare Untergruppe U von A und eine positive ganze Zahl n derart gibt, daß A/U eine n-Gruppe ist.*

Beweis. Die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in der abelschen Gruppe A ist bekanntlich eine Untergruppe E von A; und die Elemente quadratfreier Ordnung bilden eine Untergruppe Q von E, in der jede Untergruppe direkter Faktor ist.

Ist A eine Minimaxgruppe, so ist auch Q eine Minimaxgruppe. Da endlich viele Elemente in Q eine endliche Untergruppe von Q erzeugen, so folgt die Endlichkeit von Q sofort aus dem bekannten Satz, daß in einer Gruppe, deren sämtliche Untergruppen direkte Faktoren sind, dann und nur dann die Minimalbedingung gilt, wenn sie endlich ist. Da A eine Minimaxgruppe ist, so existiert eine endlich erzeugbare Untergruppe U von A derart, daß in A/U die Minimalbedingung gilt. Dann haben alle Elemente in A/U endliche Ordnung und es gibt nur endlich viele Elemente quadratfreier Ordnung; und daraus folgt, daß A/U eine n-Gruppe für geeignetes positives n ist. Damit ist die Notwendigkeit von (a) und (b) erwiesen.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit von (a) und (b) an. Dann folgt aus (a) und bekannten Sätzen die Gültigkeit der Minimalbedingung für die Untergruppen von E. Aus (b) folgern wir die Existenz einer endlich erzeugbaren Untergruppe U und einer ganzen Zahl n derart, daß A/U eine n-Gruppe ist. Wir setzen $A^* = A/E$ und $U^* = UE/E$; und bemerken, daß die Minimalbedingung jedenfalls von den Untergruppen von $UE/U \simeq E/(U \cap E)$ erfüllt wird. Weiter ist

$$A^*/U^* \simeq A/UE \simeq (A/U)/(UE/U)$$

als Faktorgruppe einer n-Gruppe selbst eine n-Gruppe; und $U^* \simeq U/(U \cap E)$ ist eine endlich erzeugbare Untergruppe der torsionsfreien Gruppe $A^* = A/E$.

Wir wollen zeigen, daß die Minimalbedingung von den Untergruppen von A^*/U^* erfüllt wird. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn die Gruppe Q^* der Elemente quadratfreier Ordnung in A^*/U^* endlich ist. Da aber A^*/U^* und also auch Q^* eine n-Gruppe ist, so ist dies dann und nur dann der Fall, wenn es nur endlich viele Elemente von vorgegebener Primzahlordnung p in A^*/U^* gibt. Wäre dies nicht wahr, so gäbe es eine unendliche und unabhängige Menge B von Elementen einer gewissen Primzahlordnung p in A^*/U^* — die Unabhängigkeit von B besagt, daß kein Element in B sich durch die andern Elemente in B ausdrücken läßt. Jedes Element in B ist eine Restklasse von A^* modulo U^*; und in jeder dieser Restklassen wählen wir irgendwie einen Repräsentanten aus. Die so ausgewählte Repräsentantenmenge heiße R. Da U^* endlich erzeugbar und also eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges ist, und da die Menge R^p der p-ten Potenzen von Elementen aus R in U^* enthalten ist, so gibt es eine nichttriviale Relation zwischen

den Elementen in R:

$$1 = \prod_{i=1}^{m} r(i)^{e(i)},$$

wo die $r(i)$ endlich viel verschiedene Elemente aus R und die Exponenten $e(i)$ sämtlich von Null verschieden sind. Wegen der Torsionsfreiheit von A^* können wir o.B.d.A. annehmen, daß die Exponenten $e(i)$ teilerfremd sind. Aus obiger Relation folgt aber auch

$$1 = \prod_{i=1}^{m} (U^* r(i))^{e(i)}.$$

Da nun die Elemente $U^* r(i)$ endlich viel verschiedene Elemente in der unabhängigen Teilmenge B von A^*/U^* sind, so muß jedes $e(i)$ durch p teilbar sein im Widerspruch zu der angenommenen Teilerfremdheit der $e(i)$. Aus diesem Widerspruch folgt nun, wie schon vorher gesagt, die Gültigkeit der Minimalbedingung in A^*/U^*.

Nun ist $A^*/U^* \sim (A/U)/(UE/U)$ und in A^*/U^* wie auch in UE/U gilt die Minimalbedingung. Also gilt sie auch in A/U; und damit haben wir gezeigt, daß A eine Minimaxgruppe ist, q.e.d.

In Verschärfung von H I, § 1, Lemma 4 beweisen wir weiter das

Lemma 2. *Ist der Normalteiler N der Gruppe G eine Minimaxgruppe, so ist N ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G.*

Beweis. Es sei M ein Normalteiler von G und $M < N$. Dann ist $N^* = N/M$ ein von 1 verschiedener Normalteiler von $G^* = G/M$; und als Faktorgruppe einer Minimaxgruppe ist N^* ebenfalls eine Minimaxgruppe.

Fall 1. N^* enthält Elemente endlicher Ordnung $\neq 1$.

Dann bilden die Elemente quadratfreier Ordnung in N^* eine von 1 verschiedene Untergruppe Q^* von N^*. Diese ist endlich, da N^* eine Minimaxgruppe ist [Lemma 1]; und als charakteristische Untergruppe von N^* ist Q^* ein Normalteiler von G^*. Naturgemäß enthält Q^* einen endlichen minimalen Normalteiler von G^*, so daß also N^* auch einen von 1 verschiedenen, fast voll reduziblen Normalteiler von G^* enthält.

Fall 2. N^* ist torsionsfrei.

Da N^* eine Minimaxgruppe ist, so ist N^* modulo einer endlich erzeugbaren Untergruppe eine Torsionsgruppe; und folglich hat N^* wie auch jede Untergruppe von N^* einen wohlbestimmten endlichen Rang [= Minimalzahl linear unabhängiger Elemente]. Also gibt es unter den in N^* enthaltenen, von 1 verschiedenen Normalteilern von G^* einen minimalen Ranges, etwa W. Dann ist W eine torsionsfreie Minimaxgruppe; und wir folgern aus Lemma 1 die Existenz einer positiven ganzen Zahl n und einer endlich erzeugbaren Untergruppe V von W [die kein Normalteiler von G^* zu sein braucht] derart, daß W/V eine n-Gruppe ist. V ist eine freie abelsche Gruppe endlichen Ranges r; und r ist auch der Rang von W. Ist p eine der unendlich vielen, n nicht

teilenden Primzahlen, so enthält W/V kein Element der Ordnung p; und ein Element w gehört also dann und nur dann zu V, wenn w^p zu V gehört [W ist ja torsionsfrei]. Da V eine freie abelsche Gruppe ist, so ist $V^p < V$. Da aber nicht in V^p gelegene Elemente aus V auch nicht zu W^p gehören, so ist

$$W^p < W \text{ für jede } n \text{ nicht teilende Primzahl } p.$$

Da W/W^p eine Minimaxgruppe ist, deren sämtliche Elemente die Ordnung p haben, so ist W/W^p endlich [Lemma 1]. Da W^p als charakteristische Untergruppe des Normalteilers W selbst Normalteiler von G^* ist, so existiert ein maximaler zwischen W^p und W gelegener Normalteiler $W(p)$ von G^*. Es ist dann $W/W(p)$ ein minimaler endlicher Normalteiler von $G^*/W(p)$ und die Ordnung von $W/W(p)$ ist durch p teilbar. Sei D der Durchschnitt aller dieser Normalteiler $W(p)$. Es ist klar, daß auch D ein Normalteiler von G^* ist. Wäre W/D eine Torsionsgruppe, so gäbe es Elemente der Ordnung p in W/D für jede n nicht teilende Primzahl p, da ja $D \leqq W(p) < W$ und $W/W(p)$ eine p-Gruppe ist. Aber W/D ist eine Minimaxgruppe; und es folgt aus Lemma 1, daß W/D nur endlich viele Elemente quadratfreier Ordnung enthält. Dies ist ein Widerspruch, aus dem folgt daß W/D keine Torsionsgruppe ist. Dann ist aber der Rang des Normalteilers D kleiner als der minimale Rang von W. Folglich ist $D = 1$; und damit haben wir gezeigt, daß W ein fast voll reduzibler Normalteiler von G^* ist.

Das Hauptresultat dieses Paragraphen ist der folgende

Satz 1. *Erweiterungen abelscher Gruppen durch endlich erzeugbare obernilpotente Gruppen sind dann und nur dann obernilpotent, wenn sie nilpotent sind.*

Dem Beweise dieses Satzes sei der Beweis einiger Hilfssätze vorausgeschickt.

Hilfssatz 1. *Wenn N ein abelscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe G und G/N zyklisch ist, dann sind Elemente von Primzahlordnung aus N in endlichen Normalteilern von G enthalten.*

Beweis. Es sei Ng ein erzeugendes Element der zyklischen Gruppe G/N. Da N abelsch ist, so wird jeder Automorphismus von N, der in N durch ein Element aus G induziert wird, bereits durch eine Potenz von g induziert.

Sei b ein Element aus N, dessen Ordnung eine Primzahl p ist. Der kleinste b enthaltende Normalteiler von G ist die von den Elementen $g^{-i} b\, g^i$ erzeugte Untergruppe B von N. Wir wollen zeigen, daß B endlich ist. Wäre dies nicht der Fall, so wären die Elemente $g^{-i} b\, g^i$ alle verschieden und bildeten eine [unendliche] Basis von B, da ja jedes der Elemente $g^{-i} b\, g^i$ die Ordnung p hat und $B^p = 1$ ist. Wir setzen $U = \{B, g\} = \{b, g\}$ und bemerken, daß U als Untergruppe einer nilpotenten Gruppe ebenfalls nilpotent ist, daß B ein abelscher Normalteiler von U und U/B zyklisch ist. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1. $p \neq 2$.

Es sei V der von den Elementen $g^{-i}(b\, g^{-1} b\, g)\, g^i$ erzeugte Normalteiler von G und U. Es ist klar, daß V in B enthalten ist; und man überzeugt

sich leicht, daß b nicht in V liegen kann, da die Elemente $g^{-i}b\,g^i$ unabhängig sind. Andererseits ist

$$g^{-1}b\,g \equiv b^{-1} \text{ modulo } V,$$

so daß g einen Automorphismus der Ordnung 2 in der zyklischen Gruppe $B/V = \{V, b\}/V$ der ungeraden Ordnung p induziert. Folglich ist $U/\{V, g^2\}$ eine nicht zyklische Gruppe der Ordnung $2p$, also eine nicht nilpotente, endliche Gruppe, was der Nilpotenz von G und U widerspricht.

Fall 2. $p = 2$.

Es sei V der von den Elementen $g^{-i}(b\,g^{-1}b\,g^{-1}b\,g^2)g^i$ erzeugte Normalteiler von G und U; und da die Elemente $g^{-i}b\,g^i$ der Ordnung 2 eine Basis von B bilden, so sind Vb und $Vg^{-1}b\,g$ zwei verschiedene Elemente [der Ordnung 2] in B/V. Da

$$g^{-2}b\,g^2 \equiv b\,g^{-1}b\,g \text{ modulo } V$$

ist, so ist B/V eine Gruppe der Ordnung 4 [die Vierergruppe]; und da weiter

$$g^{-3}b\,g^3 \equiv g^{-1}b\,g\,g^{-2}b\,g^2 \equiv b \text{ modulo } V$$

ist, so induziert g in B/V einen Automorphismus der Ordnung 3. Folglich ist $U/\{V, g^3\}$ eine nicht nilpotente Gruppe der Ordnung 12; und dies widerspricht der Nilpotenz von G und U.

Damit ist die Endlichkeit von B in beiden Fällen bewiesen, q.e.d.

Bemerkung 1. Durch wiederholte Anwendung von Hilfssatz 1 könnte man leicht beweisen, daß endlich viele Elemente endlicher Ordnung in N in einem endlichen Normalteiler von G enthalten sind.

Hilfssatz 2. *Wenn N ein torsionsfreier abelscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe G und G/N zyklisch ist, dann ist jedes Element aus N in einem Normalteiler von G enthalten, der eine Minimaxgruppe ist.*

Beweis. Es sei Ng ein erzeugendes Element der zyklischen Gruppe G/N. Da N abelsch ist, so wird jeder Automorphismus von N, der in N durch ein Element aus G induziert wird, bereits durch eine Potenz von g induziert.

Ist $b \neq 1$ ein Element aus N, so ist der kleinste b enthaltende Normalteiler von N die von den Elementen $g^{-i}b\,g^i$ erzeugte Untergruppe B von N. Wir wollen zeigen, daß diese torsionsfreie abelsche Gruppe B eine Minimaxgruppe ist.

Wären die Elemente $g^{-i}b\,g^i$ unabhängig, so bildeten sie eine Basis der dann freien abelschen Gruppe B. Ist p irgendeine Primzahl, so ist B^p als charakteristische Untergruppe des Normalteilers B von G selbst ein Normalteiler von G. Da die Elemente $g^{-i}b\,g^i$ unabhängig sind, so sind auch die Elemente $B^p g^{-i}b\,g^i$ unabhängig, so daß insbesondere B/B^p unendlich ist. Weiter ist $N/B^p = N^*$ ein abelscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe $G/B^p = G^*$ und $G^*/N^* \simeq G/N$ ist zyklisch. Weiter ist $B^p b$ ein Element der Ordnung p in N^* und $B^* = B/B^p$ ist der kleinste $B^p b$ enthaltende Normalteiler von G^*. Es folgt aus Hilfssatz 1, daß B^* endlich ist; und dies ist ein Widerspruch. Aus

der damit erwiesenen Abhängigkeit der Elemente $g^{-i}b\,g^i$ folgern wir nun die Existenz einer Relation

$$(+) \qquad 1 = \prod_{i=h}^{k} (g^{-i}b\,g^i)^{e(i)} \text{ mit } h<k \text{ und } e(h)\,e(k) \neq 0.$$

Wir setzen U gleich der von den Elementen $g^{-i}b\,g^i$ mit $h \leqq i < k$ erzeugten Untergruppe von B. Durch Transformation mit g^j folgt aus $(+)$ die Relation

$$1 = \prod_{i=h}^{k} (g^{-(i+j)}b\,g^{i+j})^{e(i)};$$

und mit ihrer Hilfe überzeugt man sich leicht, daß B/U eine $e(h)\,e(k)$-Gruppe ist. Da U endlich erzeugt ist, und da B eine torsionsfreie abelsche Gruppe ist, so folgt aus Lemma 2 sofort, daß B eine Minimaxgruppe ist, q.e.d.

Hilfssatz 3. *Erweiterungen abelscher Gruppen durch zyklische Gruppen sind dann und nur dann obernilpotent, wenn sie nilpotent sind.*

Bemerkung 2. Dieser Satz stellt insofern eine Verschärfung von BAER [1; p. 400, Lemma 1.9] dar, als die hier gemachte Voraussetzung der Nilpotenz schwächer als die dort gemachte Annahme (G) ist. Trotz mancher Ähnlichkeit ist der hier gegebene Beweis elementarer als unsere ursprüngliche Beweisanordnung.

Beweis. Die Notwendigkeit unserer Bedingung ist in Satz C enthalten. Wir nehmen also gleich an, daß N ein abelscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe G mit zyklischer Faktorgruppe G/N ist. Dann ist natürlich N auch ein hyperzentraler Normalteiler von G; und wir wollen zeigen, daß N ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G ist. Sei also M ein Normalteiler von G und $M<N$. Dann ist $N^* = N/M$ ein von 1 verschiedener abelscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe $G^* = G/N$ mit zyklischer Faktorgruppe $G^*/N^* \simeq G/N$. Ist N^* nicht torsionsfrei, so enthält N^* ein Element von Primzahlordnung und also wegen Hilfssatz 1 einen von 1 verschiedenen, endlichen Normalteiler von G^*, der dann auch eine Minimaxgruppe ist; ist aber N^* torsionsfrei, so folgern wir aus Hilfssatz 2 die Existenz eines von 1 verschiedenen, in N^* enthaltenen Normalteilers von G^*, der eine Minimaxgruppe ist. Anwendung von Lemma 2 ergibt dann die Existenz eines von 1 verschiedenen, in N^* enthaltenen, [lokal] fast voll reduziblen Normalteilers von G^*; und damit haben wir gezeigt, daß N selbst ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G ist. Es folgt aus Satz C, daß N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G ist. Da G/N zyklisch ist, so ergibt sich nun die Obernilpotenz von G aus Satz A, q.e.d.

Definition 2. *Die Gruppe G ist überauflösbar, wenn*

(a) *die Maximalbedingung von den Normalteilern von G erfüllt wird und*

(b) *jede von 1 verschiedene Faktorgruppe von G einen von 1 verschiedenen zyklischen Normalteiler enthält.*

Man überzeugt sich leicht, daß die Maximalbedingung von den Untergruppen überauflösbarer Gruppen erfüllt wird, daß Unter- und Faktorgruppen

überauflösbarer Gruppen überauflösbar sind; und es folgt aus Satz B, daß endlich erzeugbare obernilpotente Gruppen auch überauflösbar sind.

Lemma 3. *Abelsche Normalteiler mit überauflösbarer Faktorgruppe sind dann und nur dann oberhyperzentral, wenn sie hyperzentral sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist in Satz C enthalten. Es sei darum N ein abelscher, hyperzentraler Normalteiler von G mit überauflösbarer Faktorgruppe G/N. Es gibt N enthaltende Normalteiler X von G derart, daß N ein oberhyperzentraler Normalteiler von X ist, z.B. $X=N$. Da aber die Maximalbedingung von den N enthaltenden Normalteilern von G erfüllt wird, so gibt es einen maximalen N enthaltenden Normalteiler W von G derart, daß N ein oberhyperzentraler Normalteiler von W ist. Wir wollen zeigen, daß $W=G$ ist. Wäre dies nicht wahr, so folgte aus $N \leqq W < G$ und der Überauflösbarkeit von G/N die Existenz eines W enthaltenden Normalteilers V von G derart, daß V/W eine von 1 verschiedene zyklische Gruppe ist. Aus der Maximalität von W folgt dann, daß N kein oberhyperzentraler Normalteiler von V ist. Folglich existiert ein $M<N$ erfüllender Normalteiler M von V derart, daß

$$(N/M) \cap Z(V/M) = 1$$

ist. Es sei Wv ein erzeugendes Element der zyklischen Gruppe V/W. Da N ein oberhyperzentraler Normalteiler der Gruppe W ist, und da M ein Normalteiler von V und W ist, so ist

$$1 \neq (N/M) \cap Z(W/M) = A/M.$$

Es ist also $A^* = A, M$ ein abelscher Normalteiler der Gruppe $U^* = \{A, v\}/M$ mit zyklischer Faktorgruppe $U^*/A^* \simeq \{A, v\}/A$, da ja das Zentrum von W/M als charakteristische Untergruppe des Normalteilers W/M von V/M auch ein Normalteiler von V/M ist, und da also A^* ein Normalteiler von V/M ist. Da aber N ein hyperzentraler Normalteiler von G ist, so ist A^* ein hyperzentraler Normalteiler von U^*; und da U^*/A^* zyklisch ist, so ist U^* nilpotent; s. etwa H II, Satz 1. Es folgt aus Hilfssatz 3, daß U^* obernilpotent ist, daß also A^* ein oberhyperzentraler Normalteiler von U^* ist, und daß also

$$1 \neq A^* \cap Z(U^*)$$

gilt. Aus $V = \{W, v\}$ folgt nun aber, daß

$$1 = (N/M) \cap Z(V/M) = (N/M) \cap Z(W/M) \cap Z(U^*) = A^* \cap Z(U^*) \neq 1$$

ist, ein Widerspruch aus dem wir $W=G$ und die Überhyperzentralität des Normalteilers N von G folgern, q.e.d.

Bemerkung 3. Die in der Definition 2 auftretende Bedingung (a) ist für die Gültigkeit von Lemma 3 unentbehrlich. Denn es existieren Erweiterungen abelscher Gruppen durch abelsche Gruppen, die beide unendliche p-Gruppen sind, die also auch nilpotent sind, trotzdem ihr Zentrum 1 ist; s. etwa Baer

[1; p. 412, Example 3.4]. Dagegen kann man die Voraussetzung der Überauflösbarkeit von G/N in anderer Hinsicht etwas abschwächen.

Beweis von Satz 1. Die Notwendigkeit der Bedingung ist wieder in Satz C enthalten. Sei also N ein abelscher Normalteiler der nilpotenten Gruppe G mit endlich erzeugbarer obernilpotenter Faktorgruppe G/N. Es folgt aus Satz B, daß G/N überauflösbar ist. Da N ein abelscher, hyperzentraler Normalteiler von G ist, so folgt aus Lemma 3, daß N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G ist; und da G/N obernilpotent ist, so folgt aus Satz A, daß G obernilpotent ist, q.e.d.

Satz 2. *Die endlich erzeugbare Gruppe G ist dann und nur dann obernilpotent, wenn G nilpotent ist und $G^{(n)}=1$ für hinreichend großes n gilt.*

Beweis. Ist G obernilpotent, so ist G nilpotent [Satz C]. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von G folgt die Gültigkeit der Maximalbedingung [Satz B]. Also ist $G=Z_n(G)$ für hinreichend großes n [H I, § 2, Proposition 2, (viii)] und daraus folgt $G^{(n)}=1$.

Ist umgekehrt G eine endlich erzeugbare, nilpotente Gruppe, so folgert man aus Satz 1 durch vollständige Induktion nach n die Obernilpotenz aller Faktorgruppen $G/G^{(n)}$, woraus insbesondere unsere Behauptung folgt.

Bemerkung 4. Wie in Bemerkung 3 sieht man die Unentbehrlichkeit der Voraussetzung der endlichen Erzeugbarkeit von G ein.

3. Verallgemeinerte FRATTINI-Gruppen.

Es liegt nahe, den Begriff der FRATTINI-Untergruppe dadurch zu verallgemeinern, daß man Durchschnitte gewisser ausgezeichneter Klassen maximaler Untergruppen bildet. Die im folgenden gewählte Verallgemeinerung ist unseren besonderen Zwecken angepaßt.

Definition 1. *Ist U ein Untergruppe und N ein Normalteiler der Gruppe G, so ist $\Phi(N, U)$ der Durchschnitt aller der maximalen Untergruppen V von U, deren Index $[U:V]$ endlich ist, und die $U \cap N$ nicht enthalten.*

Es ist klar, daß $\Phi(N, U)$ von all den Automorphismen von U auf sich abgebildet wird, die $N \cap U$ auf sich abbilden, d.h. $\Phi(N, U)$ ist eine N-charakteristische Untergruppe von U. Da $N \cap U$ ein Normalteiler von U ist, so ist $\Phi(N, U)$ stets ein Normalteiler von U.

Dann und nur dann ist $\Phi(N, U)=U$, wenn jede maximale Untergruppe von U, deren Index in U endlich ist, auch $N \cap U$ enthält.

Ist insbesondere $N=U=G$, so setzen wir $\Phi(G, G)=\Phi^e(G)$. Diese charakteristische Untergruppe von G stimmt mit der klassischen FRATTINI-Untergruppe von G sicher dann überein, wenn G endlich ist.

Satz 1. *Ist U eine Untergruppe und N ein Normalteiler der Gruppe G, sind V und W Normalteiler von U derart, daß $W<V \leqq \Phi(N, U) \cap N$ und V/W endlich ist, dann ist V/W nilpotent.*

Beweis. Es sei P/W eine p-Sylowgruppe der endlichen Gruppe V/W und Q/W der Normalisator von P/W in U/W. Da irgendzwei p-Sylowgruppen der

endlichen Gruppe V/W in V/W konjugiert sind, und da V/W ein Normalteiler von U/W ist, so ergibt sich, wie üblich, daß $U = V\,Q$ ist. Da aber $V \leqq \Phi(N,U) \cap N \leqq U$ ist, so gilt sogar $U = Q\,[\Phi(N,U) \cap N]$. Da die Untergruppe P/W der endlichen Gruppe V/W nur endlich viele konjugierte in V/W besitzt, und da V/W ein Normalteiler von U/W ist, so ist der Index $[U:Q]$ endlich. Wäre nun $Q < U$, so gäbe es wegen der Endlichkeit von $[U:Q]$ eine maximale, Q enthaltende Untergruppe J von U, deren Index $[U:J]$ natürlich auch endlich wäre. Enthielte J die Untergruppe $U \cap N$, so wäre

$$U = Q\,[\Phi(N,U) \cap N] \leqq Q\,[U \cap N] \leqq Q\,J = J < U,$$

eine Unmöglichkeit. Also ist $U \cap N$ nicht in J enthalten; und nun folgt aus der Definition von $\Phi(N,U)$, daß $\Phi(N,U) \leqq J$ und also

$$U = Q\,[\Phi(N,U) \cap N] \leqq Q\,\Phi(N,U) \leqq Q\,J = J < U$$

ist; und dies ist ebenfalls unmöglich. Also ist $Q = U$ und P/W ein Normalteiler von U/W. Folglich sind alle Sylowgruppen der endlichen Gruppe V/W Normalteiler von U/W und also von V/W, womit die Nilpotenz von V/W erwiesen ist.

Bemerkung 1. Die Voraussetzung, daß V und W Normalteiler von U sind, ist unentbehrlich. Ist nämlich $U = N = G$ eine Gruppe ohne echte Untergruppen von endlichem Index, so ist $\Phi^e(G) = G$. Eine solche Gruppe kann aber sehr wohl endliche Faktorgruppen von Untergruppen besitzen, die nicht nilpotent sind.

Satz 2. *Die folgenden Eigenschaften des Normalteilers N der Gruppe G sind äquivalent:*

(I) *N ist ein hyperzentraler Normalteiler von G.*

(II) *Ist U eine Untergruppe von G, so ist $[U,U] \leqq \Phi(N,U)$.*

(III) *Wenn der Normalteiler V der Untergruppe U nicht in $\Phi(N,U)$ enthalten ist, dann gibt es eine maximale Untergruppe von U, die weder V noch $N \cap U$ enthält, und die Normalteiler von U ist.*

Beweis. Es sei zunächst N ein hyperzentraler Normalteiler von G. Ist dann V eine maximale Untergruppe der Untergruppe U von G, $[U:V]$ endlich und $N \cap U \nleqq V$, so folgern wir zunächst aus der Endlichkeit von $[U:V]$ und einem Satze von Poincaré die Existenz eines in V enthaltenen Normalteilers W von U, dessen Index $[U:W]$ endlich ist. Aus der Hyperzentralität von N folgt nun, daß $(U \cap N)W/W$ ein im üblichen Sinne hyperzentraler Normalteiler der endlichen Gruppe U/W ist. Weiter ist V/W eine maximale Untergruppe von U/W, die $(U \cap N)W/W$ nicht enthält; und nun folgern wir aus den wohlbekannten Eigenschaften der hyperzentralen Normalteiler endlicher Gruppen, daß V/W ein Normalteiler von U/W ist; s. etwa H I, § 5, Theorem 3, (iv). Dann ist aber auch V ein Normalteiler von U; und wir haben die Gültigkeit folgender Bedingung gezeigt:

(II′) *Ist V eine maximale Untergruppe der Untergruppe U von G, ist $[U:V]$ endlich und $N \cap U \nleqq V$, so ist V ein Normalteiler von U.*

Maximale Untergruppen, die Normalteiler sind, bestimmen aber untergruppenfreie Faktorgruppen, die zyklisch von Primzahlordnung sind. Maximale Untergruppen, die Normalteiler sind, enthalten also die Kommutatorgruppe. Mithin folgt (II) aus (II'). — Da aber Untergruppen, die die Kommutatorgruppen enthalten, Normalteiler sind, so folgt (II') aus (II); und wir haben die Äquivalenz von (II) und (II') dargetan.

Wir nehmen weiter die Gültigkeit der äquivalenten Bedingungen (II) und (II') an und betrachten einen Normalteiler V der Untergruppe U von G, der nicht in $\Phi(N,U)$ enthalten ist. Dann gibt es notwendig eine maximale Untergruppe W von U, deren Index $[U:W]$ endlich ist und die weder $N\cap U$ noch V enthält. Es folgt aus (II'), daß W ein Normalteiler von U ist; und damit haben wir gezeigt, daß (III) aus den äquivalenten Bedingungen (II) und (II') folgt.

Als nächstes setzen wir die Gültigkeit von (III) voraus. Weiter sei V ein Normalteiler der Untergruppe U von G und U/V endlich. Wir wollen zeigen, daß $(U\cap N)V/V$ ein im üblichen Sinne hyperzentraler Normalteiler von U/V ist. Wir setzen $H=U/V$ und $K=(U\cap N)V/V$. Aus der bereits dargetanen Äquivalenz von (II) und (II') und aus dem bereits erwähnten Kriterium [H I, § 5, Theorem 3, (iv)] für Hyperzentralität von Normalteilern endlicher Gruppen folgern wir, daß

(+) K dann und nur dann ein hyperzentraler Normalteiler der endlichen Gruppe H ist, wenn $[J,J]\leq\Phi(K,J)$ für jede Untergruppe J von H gilt.

Ist nun J irgendeine Untergruppe von H, so gibt es eine eindeutig bestimmte, V enthaltende Untergruppe L von U derart, daß $J=L/V$ ist. Es ist klar, daß $[J,J]=V[L,L]/V$ ist. Die maximalen Untergruppen von J, die $J\cap K$ nicht enthalten und deren Index in J endlich ist, sind dann genau die Untergruppen der Form S/V, wo S eine maximale Untergruppe von L ist, die V enthält, deren Index in L endlich ist, und die $L\cap(U\cap N)V$ nicht enthält. Aus dem DEDEKINDschen Modulsatz und $V\leq L$ folgt aber, daß

$$L\cap(U\cap N)V=V(L\cap U\cap N)=V(L\cap N)$$

ist. Also enthält S dann und nur dann nicht $L\cap(U\cap N)V$, wenn S nicht $L\cap N$ enthält; und damit haben wir gezeigt, daß

$$V\Phi(N,L)/V\leq\Phi(K,J)$$

gilt.

Wäre $[L,L]$ nicht in $\Phi(N,L)$ enthalten, so würde aus (III) die Existenz einer maximalen Untergruppe T von L folgen, die weder $[L,L]$ noch $N\cap L$ enthält, und die doch Normalteiler von L wäre. Maximale Untergruppen, die Normalteiler sind, enthalten aber, wie schon bemerkt, die Kommutatorgruppe. Aus diesem Widerspruch folgt, daß

$$[L,L]\leq\Phi(N,L)$$

ist. Folglich wird

$$[J,J]=V[L,L]/V\leq V\Phi(N,L)/V\leq\Phi(K,J).$$

Damit haben wir aber die Gültigkeit des obigen Kriteriums (+) verifiziert. Folglich ist K ein hyperzentraler Normalteiler der endlichen Gruppe H; und damit haben wir die Hyperzentralität des Normalteilers N von G erwiesen, q.e.d.

4. FRATTINI-Ketten.

Wir erinnern zunächst an den Begriff der *aufsteigenden Normalketten der Gruppe G*. Darunter verstehen wir eine wohlgeordnete Menge von Untergruppen $U_\sigma[0 \leq \sigma \leq \gamma]$ der Gruppe G mit folgenden Eigenschaften:

$$1 = U_0 \leq \cdots \leq U_\sigma \leq U_{\sigma+1} \leq \cdots \leq U_\gamma = G;$$

$$U_\sigma \text{ ist ein Normalteiler von } U_{\sigma+1};$$

ist σ eine Limeszahl, so ist U_σ die Vereinigungsmenge aller U_ν mit $\nu < \sigma$.

Ist insbesondere stets $U_\sigma < U_{\sigma-1}$, so wollen wir von einer *eigentlichen* aufsteigenden Normalkette der Gruppe G sprechen; und in den meisten Fällen wird es möglich sein, sich auf die Betrachtung eigentlicher Ketten zu beschränken.

Die Faktorgruppen $U_{\sigma+1}/U_\sigma$ heißen die *Faktoren* der Kette U_σ.

Definition 1. *Eine aufsteigende* FRATTINI-*Kette der Gruppe G ist eine aufsteigende Normalkette U_σ von G mit der Eigenschaft:*

$$\Phi^e(U_{\sigma+1}) \leq U_\sigma \text{ für jedes } \sigma.$$

Die Frage, ob jede Gruppe eine aufsteigende FRATTINI-Kette besitzt, müssen wir unentschieden lassen. Wir werden aber wenigstens eine Reihe von Gruppenklassen angeben, die aufsteigende FRATTINI-Ketten besitzen.

1. Ist $\Phi^e(G) = 1$, so heiße G *Φ^e-einfach*. Beispiele Φ^e-einfacher Gruppen sind die freien Gruppen und die abelschen Gruppen A, die $A^p = 1$ für eine gewisse Primzahl p erfüllen.

2. Jede aufsteigende Normalkette mit Φ^e-einfachen Faktoren ist auch eine FRATTINI-Kette. Daß die Umkehrung hiervon falsch ist, kann man sich an einfachen Beispielen klar machen.

3. Aus der unter 1. gemachten Bemerkung folgert man mühelos, daß jede abelsche Gruppe eine aufsteigende FRATTINI-Kette besitzt. Bezeichnet man als *schwach auflösbar* eine jede Gruppe, die eine aufsteigende Normalkette mit abelschen Faktoren besitzt, so folgt weiter, daß *jede schwach auflösbare Gruppe eine aufsteigende* FRATTINI-*Kette besitzt.*

Hauptsatz 2. *Die folgenden Eigenschaften des endlich erzeugbaren Normalteilers N der Gruppe G sind miteinander äquivalent:*

(I) *N ist ein oberhyperzentraler Normalteiler von G.*

(II) *N besitzt eine aufsteigende* FRATTINI-*Kette; sind U und V Untergruppen von G, die den Bedingungen*

$$U = V[U, U] = V(U \cap N)$$

genügen, so ist $U = V$.

(III) *N besitzt eine aufsteigende* FRATTINI-*Kette; die Untergruppe U von N ist [dann und nur dann] endlich erzeugbar, wenn $U/[U,U]$ endlich erzeugbar ist; N ist ein hyperzentraler Normalteiler von G.*

Beweis. Es sei zunächst N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G. Dann ist N auch eine obernilpotente Gruppe. Solche Gruppen sind offenbar schwach auflösbar und besitzen also aufsteigende FRATTINI-Ketten; s. 3. oben. Die Maximalbedingung wird von den Untergruppen endlich erzeugbarer obernilpotenter Gruppen erfüllt [Satz B] und es gilt also die Maximalbedingung in N. Wir betrachten schließlich Untergruppen U und V von G, die den Bedingungen

$$U = V[U,U] = V(U \cap N)$$

genügen; und nehmen $U \neq V$, also $V < U$ an. Es gibt Untergruppen S von $U \cap N$ derart, daß $\{V, S\} < U$ ist, z.B. $S = 1$. Da die Maximalbedingung von den Untergruppen von N erfüllt wird, gibt es eine maximale Untergruppe T von $U \cap N$ derart, daß $W = \{V, T\} < U$ ist. Aus $V \leq W$ folgern wir $U = W[U,U] = W(U \cap N)$ und aus $W < U$ folgt weiter, daß $U \cap N$ nicht in W enthalten ist. Ist R eine $W < R \leq U$ erfüllende Untergruppe von G, so gibt es ein nicht in W enthaltenes Element r in R. Aus $U = W(U \cap N)$ folgern wir die Existenz von Elementen w und t in W bzw. $U \cap N$ derart, daß $r = w\,t$ ist. Da r nicht in W liegt, liegt auch t nicht in W und also auch nicht in T. Da w in $W < R$ liegt, so liegt auch t in R. Dann ist aber $T < \{T, t\} \leq U \cap N$; und aus der Maximalität von T folgt weiter $\{V, T, t\} = U$. Also wird $U = \{W, t\} \leq R \leq U$; und wir haben gezeigt, daß W eine maximale Untergruppe von U ist. Da $U \cap N$ nicht in der maximalen Untergruppe W von U enthalten ist, so folgt aus H I, § 5, Theorem 3, (iv), daß W ein Normalteiler von U ist. Da U/W eine untergruppenfreie Gruppe ist, so ist U/W zyklisch von Primzahlordnung und also $[U,U] \leq W$. Dann erhalten wir aber den gesuchten Widerspruch

$$U = W[U,U] = W < U,$$

aus dem wir $U = V$ folgern. Damit haben wir gezeigt, daß (II) aus (I) folgt.

Als nächstes nehmen wir die Gültigkeit von (II) an. Ist U eine Untergruppe von N derart, daß $U/[U,U]$ endlich erzeugbar ist, so gibt es eine endlich erzeugbare Untergruppe V von U derart, daß $U = V[U,U]$ ist. Da aber $V(U \cap N) = VU = U$ ist, so folgt aus (II), daß $U = V$ eine endlich erzeugbare Gruppe ist. Betrachten wir weiter eine Untergruppe S von G und eine maximale Untergruppe T von S, die $S \cap N$ nicht enthält und deren Index $[S:T]$ endlich ist. Dann ist sicher $S = T(S \cap N)$. Da aber $T < S$ ist, so folgt aus (II), daß $[S, S]$ in T enthalten ist, da ja sonst $S = T[S, S]$ und also $T = S$ wäre. Daraus folgt $[S, S] \leq \Phi(N, S)$ für jede Untergruppe S von G; und aus § 3, Satz 2 ergibt sich weiter, daß N ein hyperzentraler Normalteiler von G ist. Also folgt (III) aus (II).

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (III) an. Da N eine endlich erzeugbare, nilpotente Gruppe ist, so folgt aus § 2, Satz 2, daß

$N/N^{(n)}$ für jedes positive n eine obernilpotente Gruppe ist.

Weiter besitzt N eine eigentliche, aufsteigende FRATTINI-Kette U_σ mit $0 \leqq \sigma \leqq \gamma$. Da N eine nilpotente Gruppe ist, so gilt $[U, U] \leqq \Phi^e(U)$ für jede Untergruppe U von N [§ 3, Satz 2]. Da die U_σ eine FRATTINI-Kette von N bilden, so gilt also

$$[U_{\sigma+1}, U_{\sigma+1}] \leqq \Phi^e(U_{\sigma+1}) \leqq U_\sigma < U_{\sigma+1} \text{ für jedes } \sigma < \gamma.$$

Es gibt eine natürliche Zahl n und eine vorgängerlose Ordinalzahl τ derart, daß $\gamma = \tau + n$ ist. Aus der eben erwiesenen Kommutativität von $U_{\sigma+1}/U_\sigma$ folgt sofort $N^{(n)} \leqq U_\tau$.

Aus $N^{(n)} \leqq U_\tau$ folgt $N^{(n+1)} \leqq [U_\tau, U_\tau]$. Wir haben vorher gezeigt, daß $N/N^{(n+1)}$ eine obernilpotente Gruppe ist. Da N endlich erzeugbar ist, so folgt aus Satz B, daß die Maximalbedingung von den Untergruppen von $N/N^{(n+1)}$ erfüllt wird. Also ist insbesondere $U_\tau/N^{(n+1)}$ endlich erzeugbar; und hieraus folgt wegen $N^{(n+1)} \leqq [U_\tau, U_\tau]$ auch die endliche Erzeugbarkeit von $U_\tau/[U_\tau, U_\tau]$. Da U_τ eine Untergruppe von N ist, ergibt sich aus (III) sogar die endliche Erzeugbarkeit von U_τ. Dann kann aber U_τ unmöglich sich als Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Folge echter Untergruppen darstellen lassen. Nun bilden die U_σ eine eigentliche Normalkette und τ ist eine Ordinalzahl ohne Vorgänger. Da τ keine Limeszahl sein kann, so folgt $\tau = 0$, $U_\tau = 1$ und also auch $N^{(n)} = 1$. Damit ist aber gezeigt, daß

$N = N/N^{(n)}$ eine obernilpotente Gruppe ist.

Wir erinnern wieder daran, daß die Maximalbedingung von den Untergruppen der endlich erzeugbaren, obernilpotenten Gruppe N erfüllt wird [Satz B]. Sei nun M ein Normalteiler von G und $M < N$. Dann ist $1 \neq Z(N/M)$ eine charakteristische Untergruppe von N/M und also ein Normalteiler von G/M. Weiter ist $Z(N/M)$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe; und es folgt aus § 2, Lemma 2 [oder aus H I, § 1, Lemma 4], daß $Z(N/M)$ ein von 1 verschiedener, in N/M enthaltener, lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G/M ist. Dann ist aber N selbst ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G. Da aber N [nach III] ein hyperzentraler Normalteiler von G ist, so folgt aus Satz C, daß N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G ist, q.e.d.

Definition 2. $\Phi_0^e(G) = G$, $\Phi_{i+1}^e(G) = \Phi^e[\Phi_i^e(G)]$.

Es ist klar, daß diese Untergruppen $\Phi_i^e(G)$ eine absteigende Folge charakteristischer Untergruppen bilden.

Folgerung 1. *Der endlich erzeugbare Normalteiler N von G ist dann und nur dann ein oberhyperzentraler Normalteiler von G, wenn N ein hyperzentraler Normalteiler von G und $\Phi_k^e(N) = 1$ für hinreichend großes k gilt.*

Beweis. Ist A eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe, so ist A^p für jede Primzahl p Durchschnitt von Untergruppen von A, deren Index genau p ist, und die also maximale Untergruppen von endlichem Index sind. Also wird $\Phi^e(A) = \bigcap_p A^p$; und aus der endlichen Erzeugbarkeit der abelschen Gruppe A folgt nun leicht, daß $\Phi^e(A)$ eine endliche Gruppe ist. Daraus folgt weiter:

(4) *Ist A eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe, so ist $\Phi_m^e(A) = 1$ für hinreichend großes m.*

Ist N ein endlich erzeugbarer oberhyperzentraler Normalteiler von G, so ist N ein hyperzentraler Normalteiler von G; und N ist eine obernilpotente Gruppe. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von N folgt die Gültigkeit der Maximalbedingung für die Untergruppen von N. Dann existiert aber eine ganze Zahl n derart, daß $N^{(n)} = 1$ ist; s. etwa § 2, Satz 2. Aus der endlichen Erzeugbarkeit aller Untergruppen U von N und (4) folgern wir weiter:

Ist U eine Untergruppe von N, so gibt es eine ganze Zahl $m = m(U)$ derart, daß $\Phi_m^e(U/[U,U]) = 1$ ist und also auch

$$\Phi_m^e(U) \leqq [U, U]$$

gilt.

Durch eine einfache Induktion folgert man nun aus $N^{(n)} = 1$ die Existenz einer ganzen Zahl k derart, daß $\Phi_k^e(N) = 1$ ist; und damit ist die Notwendigkeit unserer Bedingungen erwiesen.

Ist umgekehrt N ein hyperzentraler Normalteiler von G und $\Phi_k^e(N) = 1$ für hinreichend großes endliches k, so besitzt N gewiß eine aufsteigende FRATTINI-Kette. Aus § 3, Satz 2 folgern wir mühelos, daß $N^{(k)} \leqq \Phi_k^e(N) = 1$ ist. Aus der Hyperzentralität folgt die Nilpotenz. Also ergibt § 2, Satz 2, daß N eine obernilpotente Gruppe ist. Da N endlich erzeugbar ist, so gilt die Maximalbedingung für Untergruppen von N. Damit haben wir aber gezeigt, daß die Bedingung (III) des Hauptsatz 2 von N erfüllt wird. Also ist N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G, q.e.d.

Bemerkung 1. Wie in § 2, Bemerkung 3 sieht man die Unentbehrlichkeit der Voraussetzung ein, daß N endlich erzeugbar ist.

Folgerung 2. *Die folgenden Eigenschaften des endlich erzeugbaren Normalteilers N von G sind miteinander äquivalent:*

(I) *N ist ein oberhyperzentraler Normalteiler von G.*

(II) *Wenn U eine N enthaltende Untergruppe von G und U/N obernilpotent ist, dann ist auch U obernilpotent.*

(III) *Für jedes g in G ist $\{N, g\}$ obernilpotent.*

(IV) *$\Phi_k^e(N) = 1$ für hinreichend großes k und $\{n, g\}$ ist für jedes n in N und jedes g in G nilpotent.*

(V) *N besitzt eine aufsteigende* FRATTINI-*Kette; die Untergruppe V von N ist [dann und nur dann] endlich erzeugbar, wenn $V/[V,V]$ endlich erzeugbar ist; $\{n, g\}$ ist für jedes n in N und jedes g in G nilpotent.*

Beweis. Ist N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G, U eine N enthaltende Untergruppe von G und U/N obernilpotent, so ist N ein oberhyperzentraler Normalteiler von U [H I, § 2, Proposition 1] und also U obernilpotent [Satz A]. Mithin folgt (II) aus (I). Daß (III) aus (II) folgt, ergibt sich daraus, daß $\{N, g\}/N$ als zyklische Gruppe obernilpotent ist.

Wir nehmen weiter die Gültigkeit von (III) an. Ist dann n ein Element in N und g ein Element in G, so ist $\{n, g\}$ als Untergruppe der obernilpotenten

Gruppe $\{N, g\}$ selbst obernilpotent und also nilpotent [Satz C und H I, § 2, Proposition 1]. Weiter ist N obernilpotent; und folglich ist $\Phi_k^e(N) = 1$ für hinreichend großes k [Folgerung 1], N besitzt eine aufsteigende FRATTINI-Kette und jede Untergruppe der endlich erzeugbaren, obernilpotenten Gruppe N ist endlich erzeugbar [Satz B]. Damit haben wir gezeigt, daß sowohl (IV) wie auch (V) aus (III) folgt.

Wir haben anderwärts [H II, Satz 3] gezeigt, daß N dann und nur dann ein hyperzentraler Normalteiler von G ist, wenn $\{n, g\}$ für jedes n in N und jedes g in G nilpotent ist. Also folgt sowohl aus (IV) wie auch aus (V), daß N ein hyperzentraler Normalteiler von G ist. Nun ergibt sich aber aus Folgerung 1, daß (I) aus (IV) folgt, und aus Hauptsatz 2, daß (I) aus (V) folgt, q.e.d.

Bemerkung 2. Die vorausgesetzte endliche Erzeugbarkeit von N wurde nicht benutzt, um (II) aus (I) und (III) aus (II) herzuleiten; sie ist offenbar unentbehrlich für die Herleitung von (IV) und (V) aus (III). Daß sie aber auch unentbehrlich für die Herleitung von (I) aus (II) oder (III) ist, sieht man aus folgender allgemeiner

Konstruktion. Es sei Σ eine Gruppe von Automorphismen der abelschen Gruppe A mit folgenden Eigenschaften:

(a) Das einzige Fixelement der Gruppe Σ ist 1, d.h. aus $a = a^\Sigma$ folgt $a = 1$.

(b) Ist σ ein Automorphismus in Σ und U eine $U = U^\sigma < A$ erfüllende Untergruppe von A, so besitzt der von σ in A/U induzierte Automorphismus von 1 verschiedene Fixelemente.

Ein Beispiel eines solchen Paares A, Σ haben wir in BAER [1; p. 412, Example 3.4] angegeben. Dort sind A und Σ unendliche abelsche Gruppen, deren sämtliche von 1 verschiedene Elemente dieselbe Primzahlordnung p haben.

Es gibt einen Homomorphismus η einer freien Gruppe F auf die ganze Gruppe Σ; und es existiert ein Produkt $G = AF$ der Gruppen A und F mit der Eigenschaft:

$$f^{-1} a f = a^{f^\eta} \quad \text{für } a \text{ in } A \text{ und } f \text{ in } F;$$

es ist also G eine Erweiterung der abelschen Gruppe A durch die freie Gruppe F derart, daß das Element f aus F in A den Automorphismus f^η in Σ induziert.

Es folgt sofort aus (a), daß $A \cap Z(G) = 1$ ist; man könnte sogar $Z(G) = 1$ beweisen, da F gewiß nicht zyklisch und also eine nichtabelsche freie Gruppe ist. — Ist U eine A enthaltende Untergruppe von G und U/A obernilpotent, so ist U/A einer Untergruppe von $G/A \simeq F$ isomorph. Untergruppen freier Gruppen sind aber nach dem bekannten SCHREIERschen Satz selbst frei, so daß U/A eine freie, obernilpotente Gruppe ist. Da das Zentrum nichtabelscher freier Gruppen aber immer gleich 1 ist, so folgt, daß U/A eine zyklische Gruppe ist. Folglich existiert ein Element f in F derart, daß $U = \{A, f\}$ ist. Aus den in Bedingung (b) postulierten Eigenschaften des Automorphismus f^η in Σ und der Kommutativität von A folgert man ohne Mühe, daß A ein oberhyperzentraler Normalteiler von U ist. Da aber U/A zyklisch ist, so ergibt sich die

Obernilpotenz von U aus der von U/A. Damit haben wir gezeigt, daß der Normalteiler A der Gruppe B den Bedingungen (II) und (III) der Folgerung 2 genügt, ohne ein oberhyperzentraler Normalteiler von G zu sein.

5. Schwache Hyperzentralität.

Unsere Kriterien für Oberhyperzentralität haben sich bisher aus drei Bestandteilen zusammengesetzt: der Hyperzentralität, der endlichen Erzeugbarkeit und einer Kettenbedingung. Das Ziel dieses Abschnitts ist eine wesentliche Abschwächung der ersten dieser Bedingungen. Natürlich läßt sich dies nur bewerkstelligen, wenn wir die übrigen Bedingungen irgendwie verschärfen; und dies wird besonders die dritte Bedingung betreffen. Wir beginnen unsere Betrachtungen mit einer wichtigen Analyse der zweiten Bedingung.

Satz 1. *Die folgenden Eigenschaften des oberhyperzentralen Normalteilers N von G sind miteinander äquivalent:*

(I) *Die Gruppe N ist endlich erzeugbar.*

(II) *Die Maximalbedingung wird von den Untergruppen von N erfüllt.*

(III) *Die Maximalbedingung wird von den in N enthaltenen Normalteilern von G erfüllt.*

Beweis. Da endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppen nach Satz B der Maximalbedingung genügen, folgt (II) aus (I); und (III) ist weiter nichts als eine Abschwächung von (II).

Gilt schließlich (III), so gibt es unter den endlich erzeugbaren, in N enthaltenen Normalteilern von G einen maximalen M, da ja 1 endlich erzeugbar ist. Wäre $M<N$, so folgte $1 \neq (N/M) \cap Z(G/M)$ aus der Oberhyperzentralität von N. Also enthält $(N/M) \cap Z(G/M)$ eine von 1 verschiedene, zyklische Untergruppe T/M; und T ist ein $M<T \leq N$ erfüllender, endlich erzeugbarer Normalteiler von G. Dies widerspricht aber der Maximalität von M. Folglich ist $N=M$ endlich erzeugbar, q.e.d.

Bemerkung 1. Es ist unmöglich, die Bedingung (III) weiter abzuschwächen, indem man etwa nur noch die Maximalbedingung für die charakteristischen Untergruppen von N fordert. Dies zeigt etwa das Beispiel der unendlichen $A^p=1$ erfüllenden, abelschen Gruppen A.

Der Einführung der für unseren Hauptsatz benötigten Begriffsbildungen schicken wir noch eine auch an sich nicht uninteressante Hilfsbetrachtung voraus, die beim Beweis des Hauptsatzes benötigt werden wird.

Lemma 1. *Es seien M und N den Bedingungen $[G,N] \leq M \leq N$ genügende Normalteiler von G. Weiter seien a und b positive ganze Zahlen derart, daß $M^a=1$ ist und N^b im Zentralisator von M liegt. Dann ist*

$$N^{ab} \leq Z(G).$$

Beweis. Ist t irgendein Element in N, so gehört $s=t^b$ dem Zentralisator von M an. Ist g irgendein Element in G, so liegt $c=g^{-1}s^{-1}gs$ in $[G,N] \leq M$.

Also gelten $c^a = 1$ und $s\,c = c\,s$. Aus $s^{-1}\,g\,s = g\,c$ folgern wir jetzt durch vollständige Induktion

$$s^{-i}\,g\,s^i = g\,c^i, \qquad g = g\,c^a = s^{-a}\,g\,s^a, \qquad t^{ab}\,g = g\,t^{ab},$$

so daß t^{ab} in $Z(G)$ liegt und $N^{ab} \leq Z(G)$ ist, q.e.d.

Folgerung 1. *Wenn der endliche Normalteiler E von G in dem Normalteiler N von G enthalten ist, wenn $N\,E \leq Z(G\,E)$ und N/E keine Torsionsgruppe ist, dann ist $N \cap Z(G) \neq 1$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit a die Ordnung der endlichen Gruppe E und mit b die Ordnung der [natürlich ebenfalls endlichen] Automorphismengruppe von E. Dann ist $E^a = 1$ und N^b liegt im Zentralisator von E. Nun folgt aus unseren Voraussetzungen und Lemma 1, daß

$$1 < N^{ab} \leq N \cap Z(G)$$

ist, q.e.d.

Das neuartige der in diesem Abschnitt auftretenden Bedingungen wird hauptsächlich darin bestehen, daß wir eine Gruppe Γ von Automorphismen der [umfassenden] Gruppe G auszeichnen werden und uns vorwiegend mit Γ-Untergruppen beschäftigen werden — die Untergruppe U von G ist eine Γ-Untergruppe, wenn $U = U^\Gamma$ ist.

Definition 1. *Ist Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G und N ein Γ-Normalteiler von G, so ist $\Delta(N, \Gamma)$ der Durchschnitt aller in N enthaltenen Γ-Normalteiler X von G mit endlicher und Γ-minimaler Faktorgruppe N/X.*

Hierbei besagt die Γ-Minimalität von $N\,X$, daß $X < N$ ist und zwischen X und N kein von X und N verschiedener Γ-Normalteiler von G liegt.

Dann und nur dann ist $N = \Delta(N, \Gamma)$, wenn es keine Normalteiler X der oben beschriebenen Art gibt. — Es ist klar, daß $\Delta(N, \Gamma)$ stets ein in N enthaltener Γ-Normalteiler von G ist. — Ist schließlich $N \neq 1$, aber $\Delta(N, \Gamma) = 1$, so erhalten wir eine Verallgemeinerung des Begriffs der Fast-Voll-Reduzibilität [H II, Definition 3]. In Verallgemeinerung unserer Kriterien für lokale Fast-Voll-Reduzibilität beweisen wir nun folgendes

Lemma 2. *Wenn Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G und der Γ-Normalteiler $A \neq 1$ von G eine Minimaxgruppe ist, dann existiert ein $1 < B \leq A$ und $\Delta(B, \Gamma) = 1$ erfüllender Γ-Normalteiler B von G.*

Wir werden dies Kriterium nur anwenden, wenn A eine endlich erzeugbare, abelsche Gruppe ist.

Beweis. Man kann auf vielerlei Art eine Erweiterung H der Gruppe G derart konstruieren, daß die Gruppe der von Elementen aus H in G induzierten Automorphismen das Produkt von Γ und der Gruppe der inneren Automorphismen von G wird. Die Klasse der Γ-Normalteiler von G wird dann mit der Klasse der in G enthaltenen Normalteiler von H identisch. Es folgt aus § 2, Lemma 2, daß A ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von H ist; und hieraus folgt sofort unsere Behauptung.

Da Δ aus Γ-Normalteilern wieder Γ-Normalteiler macht, ist die folgende induktive Definition sinnvoll.

Definition 2. *Ist Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G und N ein Γ-Normalteiler von G, so ist*

$$\Delta_0(N,\Gamma)=N, \qquad \Delta_{i+1}(N,\Gamma)=\Delta[\Delta_i(N,\Gamma),\Gamma].$$

Zwecks Herleitung eines Kriteriums für das Verschwinden eines Δ_i beweisen wir zunächst das folgende

Lemma 3. *Wenn Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G ist und die Γ-Normalteiler N_i von G den Bedingungen*

$$N_n<\cdots<N_i<N_{i-1}<\cdots<N_0=N,$$

$$N_{i-1}/N_i \text{ ist ein endlicher, } \Gamma\text{-minimaler Normalteiler von } G/N_i$$

genügen, dann ist $\Delta_n(N,\Gamma)\leqq N_n$.

Beweis. Wir zeigen durch vollständige Induktion, daß

$$\Delta_i(N,\Gamma)\leqq N_i \quad \text{für} \quad i=0,\ldots,n$$

gilt. Dies ist sicher für $i=0$ wahr. Sei also für ein $0<i\leqq n$ erfüllendes i bereits

$$\Delta_{i-1}(N,\Gamma)\leqq N_{i-1}$$

gezeigt. Dann gilt

$$N_i\leqq N_i\Delta_{i-1}\leqq N_{i-1};$$

und es folgt aus der Γ-Minimalität von N_{i-1}/N_i, daß $N_i\Delta_{i-1}$ gleich N_i oder N_{i-1} ist. Im ersten Falle gilt $\Delta_i\leqq\Delta_{i-1}\leqq N_i$; und im zweiten Falle folgt aus den Isomorphiesätzen, daß $\Delta_{i-1}/[N_i\cap\Delta_{i-1}]$ ebenso wie $N_{i-1}/N_i=N_i\Delta_{i-1}/N_i$ ein endlicher, Γ-minimaler Normalteiler und also $\Delta_i\leqq N_i\cap\Delta_{i-1}\leqq N_i$ ist. Damit ist die Induktion vollendet und unsere Behauptung bewiesen.

Aus Lemma 3 folgt sofort, daß $\Delta_k(E,\Gamma)=1$ für hinreichend großes k gilt, wenn nur E ein endlicher Γ-Normalteiler ist. Tiefer als diese wichtige Bemerkung liegt die

Folgerung 2. *Ist Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G und N ein endlich erzeugbarer, obernilpotenter Γ-Normalteiler von G, so ist $\Delta_k(N,\Gamma)=1$ für hinreichend großes k.*

Beweis. Aus § 1, Hauptsatz 1 folgern wir zunächst die Existenz einer positiven ganzen Zahl k mit folgender Eigenschaft:

1 ist der Durchschnitt aller charakteristischen Untergruppen X von N derart, daß $[N:X]$ eine Primzahlpotenz p^x mit $x\leqq k$ ist.

Nun ist aber jedes derartige X als charakteristische Untergruppe des Γ-Normalteilers N von G selbst ein Γ-Normalteiler von G; und zwischen X und N kann man höchstens k-gliedrige Ketten von Γ-Normalteilern einschließen. Also gilt [nach Lemma 3] $\Delta_k(N,\Gamma)\leqq X$ für jedes derartige X. Da der Durchschnitt dieser X gleich 1 ist, ist also auch $\Delta_k(N,\Gamma)=1$, q.e.d.

Definition 3. *Ist Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G, so ist schwach Γ-hyperzentral jeder der folgenden Bedingung genügende Γ-Normalteiler N von G:*

(E) *Ist M ein in N enthaltener Γ-Normalteiler von G und N/M endlich, so ist N/M ein hyperzentraler Normalteiler von G/M.*

Ist insbesondere $N = G$, so reduziert sich (E) auf die Forderung, daß endliche Faktorgruppen nach Γ-Normalteilern nilpotent sind. — Nach Satz C folgt aus der Hyperzentralität des endlichen Normalteilers N/M sogar dessen Oberhyperzentralität. Die Frage, wann endliche Normalteiler hyperzentral sind, soll in §§ 6, 7 erörtert werden.

Die obige Definition bringt die uns interessierende Abschwächung der Hyperzentralitätsforderung. Wir können nun unser Hauptresultat, das eine weitgehende Verallgemeinerung von H I, § 8, Theorem darstellt, formulieren und beweisen.

Hauptsatz 3. *Ist Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G, so ist der Γ-Normalteiler N von G dann und nur dann ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G, wenn*

(a) *N ein schwach Γ-hyperzentraler Normalteiler von G ist,*

(b) *die Maximalbedingung von den Normalteilern von N erfüllt wird,*

(c) *es zu jedem $M < N$ erfüllenden Γ-Normalteiler M von G einen Γ-Normalteiler T von G/M mit folgenden Eigenschaften gibt:*

$$1 < T \leqq N/M, \quad \Phi^e(T) = 1,$$

ist S ein Normalteiler von T mit endlichem Index $[T:S]$, so ist $\Delta_n(T,\Gamma) \leqq S$ für hinreichend großes n.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, daß N ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G ist. Dann ist N auch hyperzentral und die Bedingung (a) ist ja nur eine abgeschwächte Form dieser Eigenschaft. Da N auch eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe ist, so wird die Maximalbedingung von den Untergruppen von N erfüllt [Satz B]; und hieraus folgt insbesondere (b). Ist weiter M ein $M < N$ erfüllender Γ-Normalteiler von G, so folgt $1 \neq (N/M) \cap Z(G/M) = S$ aus der Oberhyperzentralität von N; und S ist eine endlich erzeugbare, abelsche Gruppe, da ja in N die Maximalbedingung gilt. Da das Zentrum eine charakteristische Untergruppe ist, so ist S ein Γ-Normalteiler von G/M. Aus $S \neq 1$ und Lemma 2 folgern wir nun die Existenz eines $1 < T \leqq S$ und $\Delta(T,\Gamma) = 1$ erfüllenden Γ-Normalteilers T von G/M. Ist X ein in T enthaltener Γ-Normalteiler von G/M derart, daß $T/X \neq 1$, endlich und Γ-minimal ist, so ist sicher auch $\Phi^e(T/X) = 1$. Da aber der Durchschnitt dieser X gleich 1 ist, so ist auch $\Phi^e(T) = 1$; und damit ist die Notwendigkeit von (c) erwiesen.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit der Bedingungen (a), (b), (c) an. Aus (b) folgen sofort die beiden schwächeren Bedingungen:

(b.1) *Die Maximalbedingung wird von den in N enthaltenen Γ-Normalteilern von G erfüllt.*

(b.2) *Die Maximalbedingung wird von den Normalteilern einer jeden obernilpotenten Γ-Faktorgruppe von N erfüllt.*

Wir werden bei unserem Beweis nur diese beiden schwächeren Bedingungen (b.1) und (b.2) benutzen, nicht aber (b). Auch die Bedingung (b.2) werden wir nur an einer Stelle in ihrer vollen Schärfe anwenden; sonst werden wir nur die folgende schwächere Bedingung benutzen:

(b.2*) *Ist M ein in N enthaltener Γ-Normalteiler von G und N/M ein oberhyperzentraler Normalteiler von G/M, so wird die Maximalbedingung von den in N/M enthaltenen Normalteilern von G/M erfüllt.*

Wir wollen jetzt zeigen, daß aus (a), (b.1), (b.2) und (c) die Oberhyperzentralität und die endliche Erzeugbarkeit von N folgen. Wäre nämlich N kein oberhyperzentraler Normalteiler von G, so folgerten wir aus (b.1) die Existenz eines maximalen, in N enthaltenen Γ-Normalteilers M von G derart, daß N/M kein oberhyperzentraler Normalteiler von G/M ist. Wir setzen $N^* = N/M$ und $G^* = G/M$. Dann ist N^* ein Γ-Normalteiler von G^*. Wir leiten einige Eigenschaften von N^* her.

(1) N^* ist kein oberhyperzentraler Normalteiler von G^*.

Dies folgt aus der Wahl von M.

(2) N^* ist unendlich.

Dies folgt aus (1) und (a), da nach Satz C endliche hyperzentrale Normalteiler oberhyperzentral sind.

(3) Ist W ein von 1 verschiedener, in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^*, so ist N^*/W ein oberhyperzentraler Normalteiler von G^*/W und die Maximalbedingung wird von den Untergruppen von N^*/W erfüllt.

Die erste Behauptung folgt aus der Maximalität von M, während wir die zweite aus (b.2*) und Satz 1 erschließen können.

(4) $N^* \cap Z(G^*) = 1$.

Da das Zentrum eine charakteristische Untergruppe ist, so ist $N^* \cap Z(G^*)$ ein in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^*; und (4) folgt also aus (1), (3) und Satz A.

(5) Ist E ein in N^* enthaltener, endlicher Γ-Normalteiler von G^*, so ist $E = 1$.

Wäre nämlich $E \neq 1$, so folgte aus (3), daß N^*/E ein oberhyperzentraler Normalteiler ist, dessen Untergruppen sämtlich endlich erzeugbar sind. Dann folgt aus Satz D, daß die Gesamtheit der Elemente endlicher Ordnung in N^*/E eine endliche Gruppe P/E bildet. Da P/E eine charakteristische Untergruppe von N^*/E ist, so ist P ein Γ-Normalteiler von G^*. Es ist klar, daß P endlich ist; und es folgt aus (2), daß N^*/P eine unendliche, torsionsfreie Gruppe ist. Da mit N^*/E auch N^*/P ein oberhyperzentraler Normalteiler ist [Satz A], so ist $(N^*/P) \cap Z(G^*/P)$ eine unendliche torsionsfreie abelsche Gruppe, die natürlich auch ein Γ-Normalteiler von G^*/P ist. Direkte Anwendung von Folgerung 1 ergibt $N^* \cap Z(G^*) \neq 1$ im Widerspruch zu (4). Also ist $E = 1$ und (5) bewiesen.

(6) Ist W ein von 1 verschiedener, in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^*, so ist $1 < [G^*, W] \leqq \Delta(W, \Gamma) \leqq W$.

Wäre $[G^*, W] = 1$, so wäre $1 < W \leqq N^* \cap Z(G^*)$ im Widerspruch zu (4). Also ist $1 \neq [G^*, W]$. Weiter sei X ein in W enthaltener Γ-Normalteiler mit Γ-minimaler und endlicher Faktorgruppe W/X. Wäre $X = 1$, so wäre $W \neq 1$, aber endlich, was (5) widerspricht. Also ist $X \neq 1$; und es folgt aus (3), daß N^*/X ein oberhyperzentraler Normalteiler von G^*/X ist. Es folgt aus Satz A, daß dann auch W/X ein oberhyperzentraler Normalteiler von G^*/X ist. Folglich ist $1 \neq (W/X) \cap Z(G^*/X)$. Da das Zentrum eine charakteristische Untergruppe ist, so ist $(W/X) \cap Z(G^*/X)$ ein Γ-Normalteiler von G^*/X; und es folgt aus der Γ-Minimalität von W/X, daß $W/X = (W/X) \cap Z(G^*/X)$ ist. Also ist $W/X \leqq Z(G^*/X)$; und dies ist mit $[G^*, W] \leqq X$ gleichbedeutend. Da aber Δ der Durchschnitt all dieser X ist [Definition 1], so gilt auch $[G^*, W] \leqq \Delta(W, \Gamma)$.

(7) Ist W ein von 1 verschiedener, in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^*, so gilt $1 \neq \Delta_n(W, \Gamma)$ für jedes n.

Dies folgt ohne weiteres durch vollständige Induktion aus (6).

Bisher haben wir noch keinen Gebrauch von Bedingung (c) gemacht. Aus $N^* \neq 1$ und (c) folgern wir jetzt die Existenz eines Γ-Normalteilers T von G^* mit folgenden Eigenschaften:

(8) $1 < T \leqq N^*$, $\Phi^e(T) = 1$;

ist S ein Normalteiler von T und T/S endlich, so gilt $\Delta_n(T, \Gamma) \leqq S$ für hinreichend großes n.

Aus der letzten dieser Eigenschaften ergibt sich wegen (7), daß

(8′) jeder Normalteiler S von T mit endlichem Index $[T:S]$ einen von 1 verschiedenen Γ-Normalteiler von G^* enthält.

Wir müssen als nächstes die Struktur von T untersuchen.

(9) T ist eine unendliche abelsche Gruppe und $1 = \bigcap_{p} T^p$ [wo p alle Primzahlen durchläuft].

Die Unendlichkeit des Γ-Normalteilers $T \neq 1$ folgt aus (5). Sei nun U eine maximale Untergruppe von T mit endlichem Index $[T:U]$. Dann existieren nur endlich viele zu U in T konjugierte Untergruppen, deren Durchschnitt U' ein Normalteiler von T ist, dessen Index $[T:U']$ nach einem bekannten Satze von POINCARÉ ebenfalls endlich ist. Aus (8′) folgern wir nun die Existenz eines von 1 verschiedenen, in U' und also in U enthaltenen Γ-Normalteilers U'' von G^*. Da T/U'' wegen (3) ein oberhyperzentraler Normalteiler von G^*/U'' ist, da $1 < U'' \leqq U < T \leqq N^*$ ist, und da aus der Oberhyperzentralität ja [nach Satz C] die Hyperzentralität folgt, so ergibt sich aus § 3, Satz 2, daß

$$[T/U'', T/U''] \leqq \Phi^e(T/U'') \leqq U/U''$$

ist. Dann ist aber auch $[T, T] \leqq U < T$, so daß U ein Normalteiler von T mit Primzahlindex $[T:U]$ ist.

Aus dem eben gezeigten und (8) folgt nun zunächst

$$[T, T] \leqq \Phi^e(T) = 1,$$

so daß also T eine abelsche Gruppe ist. Da aber, wie schon bemerkt, alle maximalen Untergruppen von T Primzahlindex haben, so enthält jede maximale Untergruppe von T ein gewisses T^p [p Primzahl]. Also wird wegen (8)

$$\bigcap_p T^p \leqq \Phi^e(T) = 1,$$

womit (9) vollständig bewiesen ist.

(10) T ist torsionsfrei.

Aus (9) folgern wir zunächst, daß die Ordnungen von Elementen endlicher Ordnung in T sämtlich quadratfrei sind. Ist p irgendeine Primzahl, so sei $T(p)$ die Gesamtheit der $x^p = 1$ erfüllenden Elemente x in T. Da T abelsch ist, so ist jedes $T(p)$ eine charakteristische Untergruppe von T und also ein Γ-Normalteiler von G^*. Aus der Quadratfreiheit der Ordnungen von Elementen endlicher Ordnung in T folgt, daß die Torsionsuntergruppe E von T das [direkte] Produkt aller $T(p)$ ist; insbesondere ist E das direkte Produkt von $T(p)$ und $T'(p)$, wo wir unter $T'(p)$ das Produkt aller $T(q)$ mit $q \neq p$ verstehen wollen.

Wäre (10) falsch, so gäbe es eine Primzahl p mit $T(p) \neq 1$. Wegen (3) ist dann $N^*/T(p)$ ein oberhyperzentraler Normalteiler von $G^*/T(p)$ und alle Untergruppen von $N^*/T(p)$ sind endlich erzeugbar. Also ist insbesondere $E/T(p)$ endlich erzeugbar. Aus der Isomorphie von $E/T(p)$ und $T'(p)$ folgt dann die endliche Erzeugbarkeit der abelschen Torsionsgruppe $T'(p)$, die dann sogar endlich ist. Da $T'(p)$ ein in T und also in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^* ist, so folgt $T'(p) = 1$ aus (5). Mithin ist $E = T(p)$ und $E^p = 1$.

Wäre $E \neq T$, so würde aus $E^p = 1$ folgen, daß T^p eine unendliche torsionsfreie abelsche Gruppe ist. Als charakteristische Untergruppe von T ist T^p ein von 1 verschiedener, in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^*; und es folgt aus (3), daß jede Untergruppe von N^*/T^p endlich erzeugbar ist. Also ist insbesondere $T^p T(p)/T^p$ endlich erzeugbar. Da aber $T^p \cap T(p) = 1$ ist, so ist $T(p)$ selbst endlich erzeugbar. Als abelsche Torsionsgruppe ist dann der Γ-Normalteiler $T(p) \neq 1$ von G^* endlich; und dies widerspricht (5) [und $T(p) \leqq N^*$]. Also ist $E = T$ und $T^p = 1$.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß T ein hyperzentraler Normalteiler von G^* ist. Um dies zu tun, betrachten wir eine Untergruppe U von G^* und einen Normalteiler V von U mit endlicher Faktorgruppe U/V. Wir müssen beweisen, daß $(U \cap T)V/V$ ein [im üblichen Sinne] hyperzentraler Normalteiler der endlichen Gruppe U/V ist. Da T eine $T^p = 1$ erfüllende abelsche Gruppe ist, so ist jede Untergruppe von T direkter Faktor von T. Es existiert also eine Untergruppe H von T [die weder ein Normalteiler noch eine Γ-Untergruppe von G^* zu sein braucht] derart, daß T das direkte Produkt von H und $U \cap T$ ist, d.h.

$$T = H(U \cap T), \qquad 1 = H \cap U \cap T = H \cap U.$$

Setzen wir $S = H(V \cap T)$, so wird nach dem DEDEKINDschen Modulsatz

$$\begin{aligned} T/S = (U \cap T)H/(V \cap T)\,H &\sim (U \cap T)/[U \cap T \cap H\ (V \cap T)] \\ &= (U \cap T)/(U \cap T \cap H)\,(V \cap T) \\ &= (U \cap T)/(V \cap T) \simeq \\ \simeq (U \cap T)\,V/V &\leqq U/V\,. \end{aligned}$$

Aus der Endlichkeit von U/V folgt nun die Endlichkeit von T/S. Anwendung von (8′) ergibt jetzt die Existenz eines in S enthaltenen, von 1 verschiedenen Γ-Normalteilers L von G^*. Aus (3) folgt, daß N^*/L ein oberhyperzentraler Normalteiler von G^*/L ist; und wegen Satz A und C ist dann T/L ein hyperzentraler Normalteiler von G^*/L. Aus

$$UL/VL \simeq U/(U \cap VL) \simeq [U/V]/[(U \cap VL)/V]$$

folgt die Endlichkeit von UL/VL; und aus der Hyperzentralität von T/L ergibt sich nun, daß $(T \cap UL)VL/VL$ ein [im üblichen Sinne] hyperzentraler Normalteiler von UL/VL ist.

Da aber wegen $U \cap H = 1$ aus dem DEDEKINDschen Modulsatz

$$\begin{aligned} U \cap VL = V(U \cap L) = V(U \cap S \cap L) &= V\,[U \cap H(T \cap V) \cap L] \\ = V\,[(U \cap H)\,(T \cap V) \cap L] &= V\,[T \cap V \cap L] = V \end{aligned}$$

folgt, so erhalten wir den natürlichen Isomorphismus von UL/VL auf U/V, indem wir den Durchschnitt einer beliebigen Restklasse von UL/VL mit U bilden. Da weiter

$$(T \cap UL)\,VL \cap U = TVL \cap UL \cap U = TV \cap U = (T \cap U)\,V$$

ist, so geht bei diesem natürlichen Isomorphismus der hyperzentrale Normalteiler $(T \cap UL)VL/VL$ von UL/VL in den hyperzentralen Normalteiler $(T \cap U)V/V$ von U/V über. Damit ist gezeigt, daß T ein hyperzentraler Normalteiler von G^* ist.

Aus $T \neq 1$ folgt wegen (3), daß N^*/T ein oberhyperzentraler Normalteiler ist, von dessen Untergruppen die Maximalbedingung erfüllt wird. Insbesondere ist also N^*/T eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe. Wegen Satz C ist N^*/T nilpotent und N^* ist also eine Erweiterung des hyperzentralen Normalteilers T durch die nilpotente Gruppe N^*/T. Aus H II, Satz 1 folgt dann die Nilpotenz von N^*. Also ist die nilpotente Gruppe N^* Erweiterung eines abelschen Normalteilers T durch eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe N^*/T. Es folgt aus § 2, Satz 1, daß N^* selbst obernilpotent ist. Wir wenden Bedingung (b.2) an und sehen, daß die Maximalbedingung von den Untergruppen von N^* erfüllt wird [Satz B]. Also ist T eine endlich erzeugbare, abelsche Torsionsgruppe. Mithin ist $T \neq 1$ ein endlicher, in N^* enthaltener Γ-Normalteiler von G^* im Widerspruch zu (5). Damit hat uns unsere Annahme, daß (10) falsch sei, zu einem Widerspruch geführt und (10) ist bewiesen.

(11) Ist R ein von 1 verschiedener, in T enthaltener Γ-Normalteiler von G^*, so existiert ein von 1 verschiedener, in R enthaltener Γ-Normalteiler R' von G^* derart, daß R/R' eine unendliche freie abelsche Gruppe ist.

Als Untergruppe der wegen (10) torsionsfreien abelschen Gruppe T ist R selbst eine torsionsfreie abelsche Gruppe. Aus $R^{\mathfrak{p}} \leqq T^{\mathfrak{p}}$ und (9) folgt weiter

$$1 = \bigcap_{\mathfrak{p}} R^{\mathfrak{p}}.$$

Da R ein von 1 verschiedener, torsionsfreier Γ-Normalteiler von G^* ist, so ist auch die charakteristische Untergruppe $R^{\mathfrak{p}}$ von R ein von 1 verschiedener Γ-Normalteiler von G^*. Es folgt aus (3), daß alle Untergruppen von $N^*/R^{\mathfrak{p}}$ endlich erzeugbar sind. Also ist $R/R^{\mathfrak{p}}$ eine endlich erzeugbare, abelsche Gruppe und als solche ist

(11.a) $R/R^{\mathfrak{p}}$ endlich.

Aus (11.a) folgt zunächst, daß der Durchschnitt endlich vieler $R^{\mathfrak{p}}$ endlichen Index in R hat. Da R unendlich und der Durchschnitt aller $R^{\mathfrak{p}}$ gleich 1 ist, so folgt:

(11.b) Es gibt unendlich viele Primzahlen $\mathfrak{p}$ derart, daß $R^{\mathfrak{p}} < R$ ist.

Aus (6) folgt, daß $1 < [G^*, R] \leqq \Delta(R, \Gamma)$ ist; und aus (3) folgern wir, daß $R/[G^*, R]$ eine endlich erzeugbare abelsche Gruppe ist, da ja $[G^*, R]$ gewiß ein Γ-Normalteiler ist. Ist $\mathfrak{p}$ eine der unendlich vielen Primzahlen derart, daß $R^{\mathfrak{p}} < R$ ist, so folgt aus der Endlichkeit von $R/R^{\mathfrak{p}}$ [nach (11.a)] die Existenz eines maximalen, zwischen $R^{\mathfrak{p}}$ und R gelegenen Γ-Normalteilers $R(\mathfrak{p})$ von G^*. Dann ist aber $R/R(\mathfrak{p})$ ein endlicher und Γ-minimaler Normalteiler von $G^*/R(\mathfrak{p})$, so daß $\Delta(R, \Gamma) \leqq R(\mathfrak{p}) < R$ ist. Da aber $[R : R(\mathfrak{p})]$ endlich und durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, so ergibt sich aus (11.b), daß es unendlich viele Primzahlen $\mathfrak{p}$ derart gibt, daß $R/[G^*, R]$ Untergruppen vom Index $\mathfrak{p}$ besitzt. Also ist die endlich erzeugbare, abelsche Gruppe $R/[G^*, R]$ sicher unendlich. Ist $R'/[G^*, R]$ die Torsionsuntergruppe der endlich erzeugbaren, abelschen Gruppe $R/[G^*, R]$, so ist $R'/[G^*, R]$ endlich und R/R' eine unendliche freie abelsche Gruppe endlichen Ranges. Weiter ist es nach der Konstruktion von R' klar, daß R' ein Γ-Normalteiler von G^* ist. Damit ist (11) vollständig bewiesen.

Aus (11) ergibt sich durch vollständige Induktion die folgende Tatsache:

(12) Ist k eine positive ganze Zahl, so existiert ein in T enthaltener Γ-Normalteiler T_k von G^* derart, daß T/T_k eine freie abelsche Gruppe ist, deren Rang k übersteigt.

Aus (12) folgern wir zunächst die Existenz eines direkten Faktors von T, der eine freie abelsche Gruppe von einem k übersteigenden Range ist [der aber kein Γ-Normalteiler von G^* zu sein braucht]. Daraus ergibt sich weiter, daß die Ordnung von $T/T^{\mathfrak{p}}$ größer als $\mathfrak{p}^k$ ist; und da dies für jedes k gilt, so haben wir sogar die Unendlichkeit von $T/T^{\mathfrak{p}}$ gezeigt. Dies widerspricht aber dem Hilfssatz (11.a), den wir ja auch auf $R = T$ anwenden können. Unsere Annahme, daß N kein oberhyperzentraler Normalteiler von G sei, hat uns also zu einem Widerspruch geführt. Folglich ist N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G, dessen endliche Erzeugbarkeit sich unmittelbar aus (b.2*) und Satz 1 ergibt, q.e.d.

Die folgende interessante Eigenschaft endlich erzeugbarer Gruppen benötigen wir für die Herleitung einer Folgerung aus unserem Hauptsatz 3.

Lemma 4. *Endlich erzeugbare Gruppen besitzen nur endlich viele Normalteiler von beschränktem Index.*

Beweis. Es sei G eine endlich erzeugbare Gruppe und n eine positive ganze Zahl. Dann existiert ein endliches Erzeugendensystem E von G; und E enthalte k Elemente. Weiter seien m verschiedene Normalteiler $N(1), \ldots, N(m)$ von G derart gegeben, daß

$$[G : N(i)] \leq n \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m$$

gilt. Dann wollen wir zeigen, daß

$$(+) \qquad m \leq (n!)^k$$

ist, woraus natürlich die Behauptung des Lemma 4 sich als Spezialfall ergibt.

Zum Beweise bezeichnen wir mit $S = S_n$ die symmetrische Gruppe vom Grade n. Da die Ordnung der Faktorgruppe $G/N(i)$ höchstens n ist, so existiert ein Isomorphismus $\sigma(i)$ von $G\,N(i)$ in die Gruppe S. Unter $\gamma(i)$ wollen wir den natürlichen Homomorphismus von G auf $G/N(i)$ verstehen; und schließlich setzen wir $\nu(i) = \gamma(i)\,\sigma(i)$. Dann ist $\nu(i)$ ein Homomorphismus von G in die Gruppe S, dessen Kern genau der Normalteiler $N(i)$ ist, da ja $\sigma(i)$ ein Isomorphismus ist. Da die Normalteiler $N(i)$ paarweise verschieden sind, so sind auch die Homomorphismen $\nu(i)$ paarweise verschieden.

Jeder der Homomorphismen $\nu(i)$ induziert eine eindeutige Abbildung von E in die Gruppe S. Da E aus k und S aus $n!$ Elementen besteht, so gibt es höchstens $(n!)^k$ verschiedene eindeutige Abbildungen von E in die Gruppe S. Da aber zwei Homomorphismen von G in die Gruppe S dann und nur dann identisch sind, wenn sie auf dem Erzeugendensystem E übereinstimmen, so gibt es auch höchstens $(n!)^k$ verschiedene Homomorphismen von G in die Gruppe S. Da die m Homomorphismen $\nu(i)$ paarweise verschieden sind, so gibt es also m verschiedene Homomorphismen von G in S; und daraus folgt die zu beweisende Ungleichung (+), q.e.d.

Folgerung 3. *Untergruppen von endlichem Index von endlich erzeugbaren Gruppen enthalten charakteristische Untergruppen von endlichem Index.*

Beweis. Es sei U eine Untergruppe der endlich erzeugbaren Gruppe G und $[G : U]$ endlich. Dann existieren nur endlich viele zu U konjugierte Untergruppen von G, deren Durchschnitt U' ein Normalteiler von G ist. Es folgt aus einem wohlbekannten Satz von Poincaré, daß $[G : U']$ endlich ist, da ja U' der Durchschnitt endlich vieler Untergruppen vom endlichen Index $[G : U]$ ist. Es folgt aus Lemma 4, daß es nur endlich viele Normalteiler von G gibt, deren Index $[G : U']$ nicht überschreitet. Der Durchschnitt U'' all dieser Normalteiler ist offenbar eine in U' und in U enthaltene charakteristische Untergruppe von G, deren Index endlich ist, da U'' ja der Durchschnitt endlich vieler Normalteiler von endlichem Index ist, q.e.d.

Lemma 4 und Folgerung 3 enthalten auch die schärfere Aussage, daß es in einer endlich erzeugbaren Gruppe nur endlich viele Untergruppen mit n nicht überschreitendem Index gibt.

Zusatz 1. *Wenn Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G ist, so sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend dafür, daß der Γ-Normalteiler N von G ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G ist:*

(A) *N ist ein schwach Γ-hyperzentraler Normalteiler von G.*

(B) *Die Maximalbedingung wird von den in N enthaltenen Γ-Normalteilern von G erfüllt.*

(C) *Zu jedem $M < N$ erfüllenden Γ-Normalteiler M von G gibt es einen endlich erzeugbaren, $1 < T \leqq N/M$ und $\Phi^e(T) = 1$ erfüllenden Γ-Normalteiler T von G/M.*

Beweis. Die Bedingung (A) ist mit (a) von Hauptsatz 3 identisch und also notwendig. Aus Satz 1 folgt die Gültigkeit der Maximalbedingung für die Untergruppen endlich erzeugbarer, hyperzentraler Normalteiler. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit von (B) und in Verbindung mit (c) von Hauptsatz 3 auch die von (C).

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit der Bedingungen (A), (B), (C) an. Wäre N nicht endlich erzeugbar, so existierte nach (B) ein maximaler Γ-Normalteiler W von G derart, daß $W \leqq N$ und N/W nicht endlich erzeugbar ist. Aus der zweiten Eigenschaft folgt dann $W < N$; und nun erschließen wir aus (C) die Existenz eines endlich erzeugbaren, $1 < V \leqq N/W$ erfüllenden Γ-Normalteilers V von G/W. Es existiert ein eindeutig bestimmter Γ-Normalteiler V' von G derart, daß $W < V'$ und $V = V'/W$ ist. Aus der Maximalität von W folgt die endliche Erzeugbarkeit von N/V'. Da N/V' und V'/W also beide endlich erzeugbar sind, so ist auch N/W endlich erzeugbar im Widerspruch zu unserer Wahl von W. Damit haben wir aber die endliche Erzeugbarkeit von N dargetan.

Unsere Bedingung (A) ist mit der Bedingung (a) des Hauptsatz 3 identisch, während unsere Bedingung (B) mit der im Beweis des Hauptsatz 3 benutzten Bedingung (b.1) identisch ist. Aus der endlichen Erzeugbarkeit von N und Satz 1 folgt die Gültigkeit der Maximalbedingung in einer jeden obernilpotenten Faktorgruppe von N; und hieraus folgt auch die Bedingung (b.2). Um schließlich die Gültigkeit der Bedingung (c) des Hauptsatz 3 nachzuweisen, betrachten wir einen $M < N$ erfüllenden Γ-Normalteiler M von G. Nach (C) existiert ein endlich erzeugbarer Γ-Normalteiler T von G/M mit den folgenden Eigenschaften:

$$1 < T \leqq N/M \quad \text{und} \quad \Phi^e(T) = 1.$$

Ist S ein Normalteiler von T mit endlichem Index $[T:S]$, so folgt aus der endlichen Erzeugbarkeit von T und Folgerung 3 die Existenz einer in S enthaltenen, charakteristischen Untergruppe R von T mit endlichem Index $[T:R]$. Natürlich ist R auch ein Γ-Normalteiler von G/M. Aus der Endlichkeit von T/R und Lemma 3 folgt die Existenz einer ganzen Zahl n derart, daß

$$\Delta_n(T, \Gamma) \leqq R \leqq S$$

ist; und damit haben wir gezeigt, daß T den Forderungen von (c) genügt. Also gelten die Bedingungen (a), (b), (c) des Hauptsatz 3, so daß N ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G ist.

Zusatz 2. *Wenn Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G ist, so sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend dafür, daß der Γ-Normalteiler N von G ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G ist:*

(α) *N ist ein schwach Γ-hyperzentraler Normalteiler von G.*

(β) *Jeder in N enthaltene Γ-Normalteiler von G ist endlich erzeugbar.*

(γ) *$N^{(n)}=1$ für hinreichend großes n.*

Beweis. Die Bedingung (α) ist mit den vorhergehenden Bedingungen (a) und (A) identisch und also notwendig. Weiter folgt aus Satz 1, daß alle Untergruppen eines endlich erzeugbaren, oberhyperzentralen Normalteilers endlich erzeugbar sind; und dies zeigt die Notwendigkeit von (β). Die Notwendigkeit von (γ) kann man etwa aus § 2, Satz 2 erschließen.

Wir setzen umgekehrt die Gültigkeit von (α), (β), (γ) voraus. Die Bedingung (A) des Zusatz 1 ist mit unserer Bedingung (α) identisch; und (B) folgert man ohne Mühe aus (β). Um die Gültigkeit von (C) zu erweisen, betrachten wir einen $M<N$ erfüllenden Γ-Normalteiler M von G. Aus (γ) folgt $[N/M]^{(n)}=1$. Daraus folgt sofort die Existenz eines $1<A\leqq N/M$ erfüllenden, abelschen Γ-Normalteilers A von G/M, der wegen (β) endlich erzeugbar ist. Dann erschließen wir aber aus Lemma 2 die Existenz eines $1<T\leqq A\leqq N/M$ und $\Delta(T,\Gamma)=1$ erfüllenden Γ-Normalteilers T von G/M. Aus (β) folgt die endliche Erzeugbarkeit von T und aus der Δ-Einfachheit folgt $\Phi^e(T)=1$ [da ja endliche Γ-minimale Normalteiler notwendig Φ-einfach sind]. Also genügt T den Anforderungen von (C); und es folgt aus Zusatz 1, daß N ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G ist.

Bemerkung 3. Dieser Zusatz 2 ist besonders dadurch von Interesse, daß die Bedingungen (β) und (γ) sicher dann erfüllt sind, wenn N eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe ist [Satz 1 und § 2, Satz 2].

Zusatz 3. *Wenn Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G ist, so sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend dafür, daß der Γ-Normalteiler N von G ein endlich erzeugbarer, oberhyperzentraler Normalteiler von G ist:*

(1) *N ist ein schwach Γ-hyperzentraler Normalteiler von G.*

(2) *Die Maximalbedingung wird von den in N enthaltenen Normalteilern von G erfüllt.*

(3) *Zu jedem $M<N$ erfüllenden Γ-Normalteiler M von G existiert ein $1<T\leqq N/M$ und $\Delta(T,\Gamma)=1$ erfüllender Γ-Normalteiler T von G/M.*

Man kann den Beweis dieses dritten Zusatz anscheinend nicht durch Reduktion auf den Hauptsatz 3 oder die Zusätze 1 und 2 führen; doch läßt sich der Beweis des Hauptsatz 3 leicht so umformen [tatsächlich vereinfachen, da man nur die Hilfssätze (1) bis (6) benötigt], daß ein Beweis dieses Zusatz entsteht.

Nilpotenz der Φ-Gruppe. Die vorhergehenden Überlegungen gestatten es, in dieser Hinsicht zu allerlei Resultaten zu gelangen. Sei nämlich N ein in $\Phi^e(G)$ enthaltener Normalteiler der Gruppe G. Dann bezeichnen wir mit $\Gamma=\Gamma(G;N)$ die Gruppe aller von Elementen aus G in N induzierten

Automorphismen. Anwendung von § 3, Satz 1 ergibt unter anderem folgendes Resultat:

(s) Ist M ein Γ-Normalteiler von N mit endlichem Index $[N:M]$, so ist N/M eine endliche nilpotente Gruppe.

In der Terminologie von Definition 3 besagt dies, daß N *schwach Γ-nilpotent* ist. In Hauptsatz 3 ist also die Bedingung (a) in unserer Situation von selbst erfüllt; und entsprechendes gilt von den Zusätzen. In dieser Art ergeben sich aus Hauptsatz 3 und den Zusätzen eine Reihe von Kriterien dafür, daß N eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe ist. Diese Kriterien stellen Verallgemeinerungen eines Resultats von ITÔ [1] dar; ihre explizite Aufstellung sei dem Leser überlassen.

6. Endliche hyperzentrale Normalteiler.

Wir beginnen mit der Herleitung von Endlichkeitskriterien.

Lemma 1. *Es sei Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G derart, daß endliche Faktorgruppen von G nach Γ-zulässigen Normalteilern nilpotent sind. Weiter sei G durch endlich viele Elemente endlicher Ordnung erzeugbar. Ist dann N ein Γ-zulässiger Normalteiler von G und G/N endlich, so ist $G/[N,N]$ eine endliche, nilpotente Gruppe.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß $[N,N]$ als charakteristische Untergruppe des Γ-zulässigen Normalteilers N selbst ein Γ-zulässiger Normalteiler von G ist. Da G endlich erzeugbar und $G:N$ endlich ist, so ist N endlich erzeugbar [H I, § 1, Finiteness Principle]. Also ist $N/[N,N]$ eine endlich erzeugbare, abelsche Gruppe. Mithin wird die Maximalbedingung von den Untergruppen von $N/[N,N]$ erfüllt; und da $G:N$ endlich ist, so gilt die Maximalbedingung sogar in $G/[N,N]$. Da G/N nach Voraussetzung eine endliche nilpotente Gruppe ist, so ist $G:N$ auflösbar und $G\,[N,N]$ wenigstens schwach auflösbar. Aus unserer Voraussetzung folgt nun, daß $G\,[N,N]$ die Bedingungen (α), (β), (γ) von § 5, Zusatz 2 erfüllt. Folglich ist $G\,[N,N]$ eine endlich erzeugbare, obernilpotente Gruppe. Da aber G sich durch endlichviele Elemente endlicher Ordnung erzeugen läßt, so folgt aus Satz D die Endlichkeit von $G/[N,N]$, (die auch die Nilpotenz von $G/[N,N]$ nach sich zieht), q.e.d.

Satz 1. *Dann und nur dann ist G eine endliche nilpotente Gruppe, wenn*

(a) *G von endlich vielen Elementen endlicher Ordnung erzeugt wird,*

(b) *G schwach auflösbar ist und*

(c) *endliche Faktorgruppen von G nach charakteristischen Untergruppen nilpotent sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen (a), (b), (c) ist trivial. Wir nehmen also umgekehrt die Gültigkeit der Bedingungen (a), (b), (c) an. Wählen wir in Lemma 1 für Γ die Gruppe aller Automorphismen von G, so ergibt sich durch eine naheliegende Induktion, daß

$G/G^{(n)}$ für jedes ganze n eine endliche nilpotente Gruppe ist.

Aus der schwachen Auflösbarkeit von G folgern wir die Existenz einer aufsteigenden Normalkette U_σ mit $0 \leq \sigma \leq \gamma$ von G, deren Faktoren abelsch

sind: $[U_{\sigma+1}, U_{\sigma+1}] \leq U_\sigma < U_{\sigma+1}$. Die Ordinalzahl γ hat die Form $\gamma = \tau + n$, wo τ eine Ordinalzahl ohne Vorgänger und n eine nichtnegative ganze Zahl ist. Dann ist sicher $G^{(n)} \leq U_\tau$. Aus der schon erwiesenen Endlichkeit von $G/G^{(n)}$ und der endlichen Erzeugbarkeit von G folgern wir zunächst die endliche Erzeugbarkeit von $G^{(n)}$ [H I, § 1, Finiteness Principle]. Da aber auch $U_\tau/G^{(n)}$ als Untergruppe von $G/G^{(n)}$ endlich ist, so ist sicherlich auch U_τ endlich erzeugbar. Dann kann aber die vorgängerlose Ordinalzahl τ keine Limeszahl sein, so daß $\tau = 0$, $U_\tau = 1$, $G^{(n)} = 1$ ist; und hieraus folgt nach dem schon bewiesenen die Endlichkeit von $G = G/G^{(n)}$, q.e.d.

Lemma 2. *Es sei Γ eine Gruppe von Automorphismen der Gruppe G derart, daß endliche Faktorgruppen von G nach Γ-zulässigen Normalteilern nilpotent sind. Weiter sei G durch endlich viele Elemente endlicher Ordnung erzeugbar. Schließlich sei N ein Γ-zulässiger Normalteiler von G mit endlicher Faktorgruppe G/N. Dann ist $G/\Phi^e(N)$ eine endliche, nilpotente Gruppe.*

Beweis. Als charakteristische Untergruppe eines Γ-zulässigen Normalteilers ist $\Phi^e(N)$ selbst ein Γ-zulässiger Normalteiler von G. Sei U eine maximale Untergruppe von N mit endlichem Index $[N:U]$. Dann besitzt U nur endlich viele in N konjugierte Untergruppen, deren Durchschnitt V nach einem Satz von Poincaré ein Normalteiler von N mit endlichem Index $[N:V]$ ist. Da N endlich erzeugbar ist [H I, § 1, Finiteness Principle] und also nach § 5, Lemma 4 die Klasse der zu N/V isomorphen Faktorgruppen von N endlich ist, so ist der Durchschnitt W aller Normalteiler X von N mit $N/X \sim N/V$ ein Γ-zulässiger Normalteiler von G, dessen Index $[N:W]$ endlich ist. Nach Voraussetzung ist dann aber die endliche Gruppe G/W nilpotent; und daraus folgt, daß U ein Normalteiler von N und also $[N,N] \leq U$ ist. Also ist sogar $[N,N] \leq \Phi^e(N)$; und nun folgt unsere Behauptung aus Lemma 1.

Satz 2. *Dann und nur dann ist G eine endliche nilpotente Gruppe, wenn*

(a) *G von endlich vielen Elementen endlicher Ordnung erzeugt wird,*

(b) *G eine aufsteigende* Frattini-*Kette besitzt,*

(c) *endliche Faktorgruppen von G nach charakteristischen Untergruppen nilpotent sind.*

Der Beweis von Satz 2 erfolgt durch Rückführung auf Lemma 2 in ganz ähnlicher Weise, wie Satz 1 auf Lemma 1 zurückgeführt wurde.

Bemerkung 1. Aus Wielandts Satz folgt, daß Bedingung (c) aus folgender Bedingung hergeleitet werden kann: $[G,G] \leq \Phi^e(G)$. Umgekehrt folgt (c) aus dieser Ungleichung, (a) und § 5, Lemma 4.

Satz 3. *Die folgenden Eigenschaften des endlichen Normalteilers N der Gruppe G sind miteinander äquivalent:*

(I) *N ist ein oberhyperzentraler Normalteiler von G.*

(II) *N ist ein hyperzentraler Normalteiler von G.*

(III) *$\{N, g\}$ ist für jedes g in G eine nilpotente Gruppe.*

(IV) *Für jedes g in G ist $[\{N, g\}, \{N, g\}] \leq \Phi^e(\{N, g\})$.*

Beweis. Wegen der Endlichkeit von N ist die Äquivalenz von (I) und (II) in Satz C enthalten, während die von (II) und (III) sich aus H II, Satz 3

ergibt. — Daß (IV) aus (III) folgt, kann man etwa aus § 3, Satz 2 erschließen. Gilt schließlich (IV), so bemerken wir zunächst, daß das Element g in G in N einen Automorphismus endlicher Ordnung a induziert. Dann ist aber g^a sowohl mit g wie auch mit jedem Element in N vertauschbar und liegt also in $Z(\{N, g\})$. Man überzeugt sich dann sofort, daß $H = \{N, g\}/Z(\{N, g\})$ eine endliche Gruppe ist. Weiter ist wegen (IV)

$$[H, H] \leqq Z(\{N, g\}) \Phi^e(\{N, g\})/Z(\{N, g\}) \leqq \Phi(H);$$

und nun folgt aus dem bekannten WIELANDTschen Satz, daß H eine endliche nilpotente Gruppe ist; s. etwa ZASSENHAUS [*1*; p. 108, Satz 13]. Dann ist aber auch $\{N, g\}$ selbst obernilpotent [Satz A]; und wir haben gezeigt, daß (III) aus (IV) folgt.

7. Zerfallende Erweiterungen.

Bekanntlich nennt man die Gruppe G eine *zerfallende* Erweiterung ihres Normalteilers N, wenn ein *Komplement* von N in G existiert, d.h. eine den Bedingungen $G = NK$, $1 = N \cap K$ genügende Untergruppe K von G. Über die Oberhyperzentralität der Kerne zerfallender Erweiterungen lassen sich einige Bemerkungen machen, die interessante Anwendungen gestatten.

Der Normalteiler N der Gruppe G heiße ein *M-Normalteiler* von G, wenn er folgender Bedingung genügt:

(M) *Wenn es in der Untergruppe U von G maximale Untergruppen gibt, die $N \cap U$ nicht enthalten, dann ist eine dieser maximalen Untergruppen ein Normalteiler von U.*

Da aber maximale Untergruppen, die Normalteiler sind, eine zyklische Faktorgruppe haben und also die Kommutatorgruppe enthalten, so folgt aus (M) die schwächere Eigenschaft:

(M′) *Wenn es in der Untergruppe U von G maximale Untergruppen gibt, die $N \cap U$ nicht enthalten, dann ist $N \cap U$ auch nicht in $[U, U]$ enthalten.*

Normalteiler mit dieser Eigenschaft (M′) werden wir auch als *M′-Normalteiler* bezeichnen. Daß oberhyperzentrale Normalteiler M-Normalteiler und also M'-Normalteiler sind, folgt etwa aus H I, § 5, Theorem 3, (iv).

Lemma 1. *Wenn G eine zerfallende Erweiterung des endlich erzeugbaren, abelschen M'-Normalteilers N ist, und wenn der Normalteiler $L \neq 1$ von G in N enthalten ist, dann ist $[L, G] < L$.*

Beweis. Da G eine zerfallende Erweiterung von N ist, so existiert eine Untergruppe K von G derart, daß $G = NK$ und $1 = N \cap K$ ist. Da der Normalteiler L von G in der abelschen Gruppe N enthalten ist, so ist $[L, L] = [L, N] = 1$. Folglich wird

$$[L, G] = [L, N][L, K] = [L, K] \leqq [L, K][K, K] = [L, L][L, K][K, K] = [U, U],$$

wenn wir $U = LK$ setzen. Weiter ist sicher

$$L \cap K = L \cap N \cap K = 1 < L$$

und also

$$K < LK = U.$$

Da aber L als Untergruppe der endlich erzeugbaren, abelschen Gruppe N selbst endlich erzeugbar ist und die Maximalbedingung von den Untergruppen von L erfüllt wird, so existiert eine maximale, K enthaltende Untergruppe V von U. Da $V < U$ ist, kann L nicht in V enthalten sein. Aus dem DEDEKINDschen Modulsatz folgt, daß

$$N \cap U = N \cap LK = L(N \cap K) = L$$

ist und daß also $N \cap U$ nicht in der maximalen Untergruppe V von U enthalten ist. Da aber N ein M'-Normalteiler von G ist, so ist $N \cap U = L$ auch nicht in $[U,U]$ enthalten. Aus $[L,G] \leqq [U,U]$ folgt also, daß L auch nicht in $[L,G]$ enthalten ist. Da L ein Normalteiler von G und also sicherlich $[L,G] \leqq L$ ist, so ergibt sich schließlich die gewünschte Ungleichung $[L,G] < L$, q.e.d.

Bemerkung 1. Die Gruppe G werde von den Elementen a und b erzeugt, die den Relationen

$$a^3 = b^4 = 1, \quad b^{-1} a b = a^{-1}$$

genügen. Die Elemente a und b^2 erzeugen dann einen zyklischen Normalteiler N der Ordnung 6. Man kann sich leicht überzeugen, daß N ein M-Normalteiler von G ist, und daß G/N eine zyklische Gruppe der Ordnung 2 ist. Andererseits ist $[G,[G,N]] = [G,N] = \{a\}$; und wir sehen die Unentbehrlichkeit der Annahme, daß G eine zerfallende Erweiterung von N ist.

Folgerung 1. *Wenn G eine zerfallende Erweiterung des endlichen, abelschen M'-Normalteilers N von G ist, dann ist N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G.*

Beweis. Wir definieren induktiv $N(0) = N$, $N(i+1) = [G,N(i)]$. Dann folgt aus Lemma 1 und der Endlichkeit von N, daß $N(k) = 1$ für hinreichend großes k gilt; und hieraus folgt sofort die Oberhyperzentralität von N; s. etwa H I, § 2, Proposition 2, (viii).

Folgerung 2. *Wenn N ein abelscher M'-Normalteiler von G ist, und wenn N eine p-Gruppe ist, deren Untergruppen der Minimalbedingung genügen, dann ist N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G.*

Beweis. Wir wollen zunächst die folgende Eigenschaft verifizieren:

(a) Wenn x ein Element in N und y ein Element in G ist, dann gibt es eine positive ganze Zahl $m = m(x,y)$ derart, daß $x\, y^{p^m} = y^{p^m}\, x$ ist.

Wäre dies nicht wahr, so gäbe es ein Element w in N und ein Element g in G derart, daß $w\, g^{p^i} \neq g^{p^i} w$ für jedes positive i gilt. Sei p^k die Ordnung von w und K die Gesamtheit der $x^{p^k} = 1$ erfüllenden Elemente in N. Da N abelsch ist, so ist K eine charakteristische Untergruppe von N und also ein Normalteiler von G; und da in N die Minimalbedingung gilt, so ist K endlich. Also induziert g in K einen Automorphismus endlicher Ordnung $a\, p^b$ mit $0 \leqq b$ und zu p teilerfremdem a. Wir setzen $h = g^{p^b}$. Dann induziert h einen Automorphismus der Ordnung a in K; und aus $w\, h \neq h\, w$ folgt $a \neq 1$. Unter den Elementen in G, die in K denselben Automorphismus wie h induzieren, gibt es entweder Elemente der Ordnung 0 oder Elemente, deren Ordnung zu p teilerfremd ist. Mithin existiert ein Element v in G derart, daß $N \cap \{v\} = 1$ ist und v in K einen Automorphismus der Ordnung a induziert. Wir bilden

$V = \{N, v\}$. Es ist klar, daß V eine zerfallende Erweiterung seines M'-Normalteilers N ist. Wir definieren induktiv: $K(0) = K$, $K(i+1) = [V, K(i)]$. Dann folgt aus Lemma 1, daß entweder $K(i) = 1$ oder $K(i+1) < K(i)$ ist, da ja die $K(i)$ offenbar Normalteiler von V sind. Aus der Endlichkeit von K folgt nun die Existenz einer ganzen Zahl j derart, daß $K(j) = 1$ ist; und nun folgern wir aus H I, § 2, Proposition 2, (viii), daß K ein oberhyperzentraler Normalteiler von V ist. Dann folgt aber aus H I, § 3, Lemma 2 die Existenz einer ganzen Zahl s derart, daß $x v^{p^s} = v^{p^s} x$ für jedes x in der endlichen Gruppe K gilt; und dies widerspricht der Tatsache, daß v in K einen Automorphismus mit zu p teilerfremder Ordnung $a \neq 1$ induziert. Unsere Annahme, daß (a) falsch ist, hat uns also zu einem Widerspruch geführt, womit (a) bewiesen ist.

Da N eine abelsche Gruppe ist, von deren Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird, so ist N ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G [wie man entweder direkt einsieht oder aus § 2, Lemma 2 folgert]. Dann folgt aber aus H I, § 5, Theorem 2, daß N ein oberhyperzentraler Normalteiler von G ist, q.e.d.

Folgerung 3. *Wenn der minimale Normalteiler N von G endlich erzeugbar ist und die Eigenschaft* (M′) *hat, dann ist $N \leq Z(G)$.*

Beweis. Da $N \neq 1$ endlich erzeugbar ist, so besitzt N eine maximale Untergruppe V. Wenden wir jetzt (M′) mit $U = N$ an, so ist ja $U \cap N = N$ sicher nicht in V enthalten; und also ist N auch nicht in $[N,N]$ enthalten. Also ist $[N,N] < N$. Da aber N eine Gruppe ohne echte charakteristische Untergruppen ist, so folgt $[N,N] = 1$. Mithin ist N eine von 1 verschiedene, endlich erzeugbare, abelsche Gruppe; und es existiert folglich eine Primzahl p derart, daß $N^p < N$ ist. Aus der Abwesenheit echter charakteristischer Untergruppen von N folgt $N^p = 1$, so daß N als endlich erzeugbare abelsche Gruppe sogar eine endliche p-Gruppe ist. Anwendung von Folgerung 2 ergibt die Oberhyperzentralität von N, so daß insbesondere $N \cap Z(G) \neq 1$ ist. Da aber $N \cap Z(G)$ ein Normalteiler von G und N ein minimaler Normalteiler von G ist, so folgt $N = N \cap Z(G)$ oder $N \leq Z(G)$, q.e.d.

Satz 1. *Der Normalteiler N von G ist dann und nur dann oberhyperzentral, wenn*

(a) *N ein lokal fast voll reduzibler Normalteiler von G ist und*

(b) *H/K ein M'-Normalteiler von G/K ist, falls H und K Normalteiler von G sind, die der Ungleichung $K < H \leq N$ genügen.*

Dies leitet man ohne große Mühe aus Folgerung 3 und H I, § 5, Theorem 3 her.

Literatur.

BAER, REINHOLD: [1] Nilpotent groups and their generalizations. Trans. Amer. Math. Soc. **47**, 393—434 (1940). — [2] The hypercenter of a group. Acta math., Stockh. **89**, 165—208 (1953); zitiert als H I. — [3] Das Hyperzentrum einer Gruppe. II. Arch. Math. **4**, 86—96 (1953); zitiert als H II. — ITÔ, NOBORU: [1] Note on S-groups. Proc. Imp. Jap. Soc. Sci. **1953**. — ZASSENHAUS, H.: [1] Lehrbuch der Gruppentheorie. Leipzig u. Berlin 1937.

University of Illinois, Urbana, Illinois (USA.).

(Eingegangen am 31. August 1953.)

Uniformisierung

Von **Rolf Nevanlinna,** Finnische Akademie, Honorarprofessor an der Universität Zürich. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden. Band LXIV.) Mit 22 Abbildungen. X, 391 Seiten Gr.-8°. 1953.

DM 46.50; Ganzleinen DM 49.50

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Algebraische Funktionen. — Begriff der Riemannschen Fläche. — Funktionentheoretische Grundsätze. — Existenzsätze. — Geschlossene Riemannsche Flächen. — Der Riemannsche Abbildungssatz. — Gruppen von linearen Transformationen. — Uniformisierung. — Schlichtartige Flächen. — Offene Riemannsche Flächen. — Literaturverzeichnis. — Register.

Die vorliegende zusammenfassende Darstellung der Theorie der Uniformisierung ist entstanden auf der Grundlage von Vorlesungen, die der Verfasser an den Universitäten Helsinki und Zürich gehalten hat. Nach Möglichkeit sind auch die Fortschritte der geometrischen Funktionentheorie der letzten Jahre berücksichtigt worden, vor allem in der Richtung der Theorie der offenen Riemannschen Flächen.

Eindeutige analytische Funktionen

Von Dr. **Rolf Nevanlinna,** Finnische Akademie, Honorarprofessor an der Universität Zürich. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden. Band XLVI.) Zweite, verbesserte Auflage. Mit 24 Abbildungen. X, 379 Seiten Gr.-8°. 1953. DM 46.50; Ganzleinen DM 49.50

Inhaltsübersicht: Einleitung. I. Konforme Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Gebiete. — II. Lösung des Dirichletschen Problems für ein schlichtes Gebiet. — III. Funktionentheoretische Majorantenprinzipien. — IV. Beziehungen zwischen nichteuklidischen und euklidischen Maßbestimmungen. — V. Punktmengen vom harmonischen Maß Null. — VI. Erster Hauptsatz der Theorie der meromorphen Funktionen. — VII. Beschränktartige Funktionen. — VIII. Meromorphe Funktionen endlicher Ordnung. — IX. Zweiter Hauptsatz der Theorie der meromorphen Funktionen. — X. Anwendung des zweiten Hauptsatzes. — XI. Die Riemannsche Fläche einer einwertigen Funktion. — XII. Der Typus einer Riemannschen Fläche. — XIII. Die Ahlforssche Theorie der Überlagerungsflächen. — Literaturverzeichnis. — Sachverzeichnis.

Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker

Von Dr.-Ing. **R. Zurmühl,** Darmstadt. Mit 114 Abbildungen. XI, 481 Seiten Gr.-8°. 1953. Ganzleinen DM 28.50

Inhaltsübersicht: **I. Einführung. Hilfsmittel.** — **II. Gleichungen:** Allgemeine Gleichungen mit einer Unbekannten. Algebraische Gleichungen. Gleichungen dritten und vierten Grades. Algebraische Gleichungen höheren Grades: Verfahren von Graeffe. Stabilitätskriterien. — **III. Lineare Gleichungen und Matrizen:** Der Gaußsche Algorithmus. Matrizen. Die Kehrmatrix. Das Eigenwertproblem. Iterative Behandlung linearer Gleichungssysteme. Iterative Behandlung des Eigenwertproblems.— **VI. Interpolation und Integration:** Allgemeine Interpolationsformeln. Spezielle Interpolationsformeln. Numerische Integration. Graphische Integration. — **V. Ausgleichsrechnung:** Direkte Beobachtung einer Meßgröße. Ausgleich vermittelnder Beobachtungen. Bedingte Beobachtungen. — **VI. Darstellung willkürlicher Funktionen:** Harmonische Analyse. Ausgleichsparabeln. Annäherung willkürlicher Funktionen. — **VII. Differentialgleichungen: Anfangswertaufgaben:** Grundgedanken. Zeichnerische Verfahren. Das Runge-Kutta-Verfahren. Differenzenschemaverfahren (Interpolation). — **VIII. Differentialgleichungen: Rand- und Eigenwertaufgaben:** Einführung. Differenzen- und Quadraturverfahren. Funktionenansatz. Das Ritzsche Verfahren. Verfahren der schrittweisen Näherung. — **Sachverzeichnis.**

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Physikalisches Wörterbuch

Herausgegeben von **Wilhelm H. Westphal**, Berlin. Zwei Teile in einem Band. Mit etwa 10500 Stichwörtern und 1595 Textfiguren. VI, 833 und 795 Seiten. 1952. Halbfranz DM 148.—

Aus den Besprechungen: ... Die 2. Auflage des Physikalischen Handwörterbuches von Arnold Berliner und Karl Scheel ist vor fast 20 Jahren erschienen. Die vorliegende völlige Neuschaffung entsprang dem Bedürfnis nach einem Nachschlagewerk, das die großen Fortschritte dieses Zeitabschnittes berücksichtigt. Unter den 80 Mitarbeitern befindet sich auch eine Reihe von Chemikern (H. Götte, R. Haul, G. Schramm, K. Wirtz u. a. m.). Neben der reinen Physik werden Begriffe und Erkenntnisse der physikalischen Chemie und der Astrophysik einbezogen. Auch die Biophysik und die Geophysik sind bis zu einem begrenzten Umfang aufgenommen. Aus der Mathematik werden diejenigen Stichworte gebracht, die für die tägliche Arbeit eines Physikers und Naturwissenschaftlers in Frage kommen. Am Schluß des Buches werden ein kurzer geschichtlicher Abriß der Physik (dieser Abschnitt dürfte vorwiegend H. Schimank zuzuschreiben sein) sowie die Lebensdaten bekannter Physiker und zahlreicher lebender Physiker des deutschen Sprachgebietes gebracht.

Das Werk ist in erster Linie für den Physiker gedacht. Aber auch für den Chemiker, Ingenieur und Biologen und ganz allgemein für jeden naturwissenschaftlich Interessierten wird es eine wertvolle Hilfe zur Klärung von täglich auftretenden Fragen sein.

Selbstverständlich setzt das Wörterbuch eine gewisse physikalische Vorbildung voraus. Es beschreibt und erklärt nach dem neuesten Stand, Begriffe, Gesetze, Meßgeräte, technische Apparaturen, Maßeinheiten usw. und erläutert ihre Anwendung und Brauchbarkeit. Auf weiterführende Literatur wird an vielen Stellen hingewiesen. Der Text ist trotz der knappen Darstellung flüssig und verständlich.

„Angewandte Chemie"

Physik. Ein Lehrbuch

Von **Wilhelm H. Westphal.** Sechzehnte und siebzehnte Auflage. Mit 649 Abbildungen. XII, 743 Seiten Gr.-8°. 1953. Ganzleinen DM 33.60

Inhaltsübersicht: Einleitung. **Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper:** Bewegungslehre. Die Lehre von den Kräften. Die allgemeine Gravitation. **Physik der Stoffe:** Die Materie. Die Elastizität der festen und flüssigen Stoffe. Mechanik ruhender Flüssigkeiten. Mechanik ruhender Gase. Mechanik bewegter Flüssigkeiten und Gase. Schwingungen und Wellen. Schall. **Wärmelehre:** Das Wesen der Wärme. Zustandsgleichungen. Wärmeenergie. Änderungen des Aggregatzustandes. Lösungen. Die drei Hauptsätze der Wärmelehre. Wärme und Arbeit. **Elektrostatik:** Die elektrostatischen Erscheinungen im Vakuum. Die elektrischen Eigenschaften der Stoffe. **Elektrische Ströme:** Elektrische Ströme in festen Leitern. Elektrische Ströme in flüssigen Leitern. Elektrische Ströme in Gasen. **Magnetismus und Elektrodynamik:** Magnetische Felder im Vakuum. Die magnetischen Eigenschaften der Stoffe. Elektromagnetische Induktion. Wechselstrom. Elektrische Maschinen. Elektrische Schwingungen und Wellen. **Optik und allgemeine Strahlungslehre:** Das Wesen des Lichtes. Lichtmessung. Geometrische Optik. Wellenoptik. Das elektromagnetische Spektrum. Strahlungsgesetze. **Relativitätstheorie. Quantentheorie. Atome und Moleküle. Kristalle:** Quantentheorie des Lichtes. Quantentheorie der Atome und Moleküle. Quantenmechanik. Physik der Atomkerne. Ultrastrahlung. **Astrophysik und Physik des Weltalls.** Schlußwort. Anhang. Namen- und Sachverzeichnis.

Kleines Lehrbuch der Physik

ohne Anwendung höherer Mathematik

Von **Wilhelm H. Westphal,** Honorarprofessor an der Technischen Universität Berlin. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 283 Abbildungen. VIII, 263 Seiten Gr.-8°. 1953. Ganzleinen DM 12.60

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen je ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin - Göttingen - Heidelberg, und ein Prospekt des Springer-Verlages, Wien, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.